ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

Η δομή των Ορθογωνίων πινάκων

Σε εφαρμογή των γνώσεων που αποκομήσαμε από το μάθημα, εξετάζουμε εδώ τη δομή των ορθογωνίων πινάκων. Πρόκειται για τους πραγματικούς πίνακες A που έχουν τις ιδιότητες:

1. $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2. Η σχέση αυτή συνεπάγεται ότι ο A αντιστρέφεται (γιατί;) και ισοδυναμεί με την $A^{-1} = A^T$, που με τη σειρά της συνεπάγεται την $1 = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A \cdot A^T) = \det(A)\det(A^T) = \det(A)^2$, αφού οι A, A^T έχουν πάντα την ίδια ορίζουσα.

3. Το σύνολο των ορθογωνίων $n \times n$ πινάκων αποτελεί «ομάδα», πράγμα που σχετίζεται με το ότι, το γινόμενο δύο ορθογώνιων είναι ορθογώνιος και ο αντίστροφος ορθογωνίου είναι, επίσης, ορθογώνιος πίνακας.

4. Η σχέση $A \cdot A^T = I_n$, όπου I_n ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας ισοδυναμεί με το ότι «οι γραμμές του A αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$» (γιατί;).

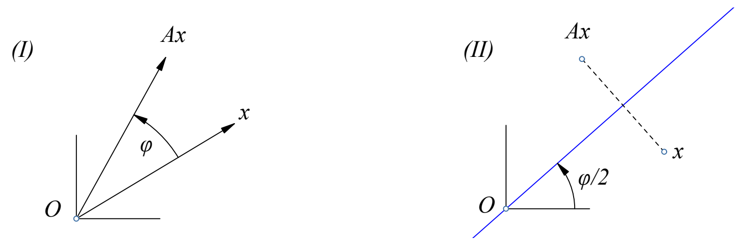
5. Ανάλογα, η ισοδύναμη σχέση $A^T \cdot A = I_n$ ισοδυναμεί με το ότι «οι στήλες του A αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$» (γιατί;).

6. Αφού ένας ορθογώνιος $n \times n$ πίνακας είναι αντιστρέψιμος, η τάξη του είναι n, άρα οι γραμμές του αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$. Ομοίως, και οι στήλες του αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$. Αφού, λοιπόν, οι στήλες του A και οι στήλες του A^T αποτελούν βάσεις του $\mathbb{R}^n$, θα υπάρχει πίνακας B «αλλαγής βάσης», έτσι ώστε $A = A^T \cdot B$. Η σχέση αυτή ισοδυναμεί, λόγω της $A^{-1} = A^T$, με την $A^2 = B$.

7. Οι ορθογώνιοι πίνακες διάστασης 2 είναι της μορφής

$$R_\phi^+ = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad R_\phi^- = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}.$$

   Αυτό προκύπτει από το (5), διαλέγοντας την πρώτη στήλη να είναι μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ (παρατηρήστε ότι κάθε μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ έχει συν/μένες της μορφής $(\cos\phi, \sin\phi)$). Αναγκαστικά, η δεύτερη θα έχει μία από τις παραπάνω μορφές δεύτερης στήλης. Η εικόνα δείχνει πως μετασχηματίζεται το x στο $y = Ax$, στις δύο παραπάνω περιπτώσεις ορθογωνίων 2×2 πινάκων. Το πρώτο είδος παριστάνει «στροφές» περί την αρχή των αξόνων και το δεύτερο παριστάνει «ανακλάσεις» ως προς ευθεία διερχόμενη από την αρχή των αξόνων O.



Σχήμα 1: (I) Στροφές R^+_ϕ, Ανακλάσεις R^-_ϕ

Το πρώτο είδος χαρακτηρίζεται από το ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι συζυγείς μιγαδικές $\cos\phi \pm i\sin\phi$ μέτρου 1. Για $\phi \neq k\pi$, οι ιδιοτιμές είναι μη πραγματικές και αυτό αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι, σε μια στροφή κατά γωνία $\neq k\pi$ (εικόνα (I), το διάνυσμα που προκύπτει από τη στροφή, δεν μπορεί να είναι πολλαπλάσιο του αρχικού διανύσματος επί πραγματικό αριθμό.

Το δεύτερο είδος χαρακτηρίζεται από το ότι οι ιδιοτιμές του είναι $+1, -1$. Διαπιστώνεται ότι το διάνυσμα με συντεταγμένες $(\cos(\phi/2), \sin(\phi/2))$ είναι ιδιοδιάνυσμα, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $+1$ και το διάνυσμα με συντεταγμένες $(-\sin(\phi/2), \cos(\phi/2))$ είναι ιδιοδιάνυσμα, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -1. Αυτό αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι, το διάνυσμα που προκύπτει από την ανάκλαση (εικόνα (II) ως προς άξονα, μπορεί να είναι στην ίδια διεύθυνση με το αρχικό, μόνο αν το αρχικό διάνυσμα βρίσκεται επί του άξονα ή είναι κάθετο προς αυτόν.

8. Γενικά, οι ιδιοτιμές ορθογώνιου πίνακα οποιασδήποτε διάστασης έχουν την παραπάνω μορφή, δηλαδή είτε θα είναι μιγαδικές, και θα εμφανίζονται κατά ζεύγη μιγαδικών συζυγών μέτρου 1 (άρα τα ζεύγη αυτά θα είναι της μορφής $\cos\phi + i\sin\phi$, $\cos\phi - i\sin\phi$) είτε θα είναι πραγματικές $+1, -1$. Αυτό συμβαίνει διότι οι ορθογώνιοι πίνακες είναι ειδική περίπτωση ορθομοναδιαίων, για τους οποίους γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές τους είναι μιγαδικοί μέτρου 1.

   Το ότι οι μιγαδικές ιδιοτιμές εμφανίζονται κατά ζεύγη συζυγών οφείλεται στο ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ορθογώνιου πίνακα έχει συντελεστές πραγματικούς, άρα με κάθε μιγαδική ρίζα του και η αντίστοιχη συζυγής θα είναι επίσης ρίζα του πολυωνύμου. Για n άρτιο μπορεί να έχουμε μόνο μιγαδικές ιδιοτιμές. Για n περιττό θα υπάρχουν οπωσδήποτε πραγματικές ιδιοτιμές από το σύνολο $\{+1, -1\}$.

9. Παραδείγματα ορθογωνίων πινάκων είναι τα:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad B^\phi_\pm = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \mp\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \pm\cos(\phi) \end{pmatrix}$$

10. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B^ϕ_+ είναι $(1-\lambda)((\cos\phi - \lambda)^2 + \sin\phi^2)$ και έχει

μία μόνο πραγματική ρίζα, τη $\lambda = 1$ και δύο μιγαδικές (συζυγείς, όπως αναμένομε, γιατι;), τις $\lambda_\pm = \cos\phi \pm \sin\phi$. Επίσης η ορίζουσα είναι θετική.

11. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B_-^ϕ είναι $(1-\lambda)(\lambda^2-1)$ και έχει την απλή ρίζα $\lambda_- = -1$ και τη διπλη $\lambda_+ = 1$. Επίσης η ορίζουσα είναι αρνητική.

12. Αν ο $n \times n$ ορθογώνιος πίνακας A έχει ιδιοτιμή το ± 1 και αν b_1 είναι αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα, τότε τόσο ο $W_1 = \langle b_1 \rangle$, όσο και το ορθογώνιο συμπλήρωμα αυτού $W_2 = \langle b_1 \rangle^\perp$ θα «είναι υπόχωροι ανλλοίωτοι ως προς A», δηλαδή θα ισχύει

$$A(W_1) \subseteq W_1 \quad \text{και} \quad A(W_2) \subseteq W_2.$$

Συνεπώς, αν $\{b_2, \ldots, b_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος $W_2 = \langle b_1 \rangle^\perp$, τότε, για κάθε $x \in W_2$ θα ισχύει ότι και $Ax \in \langle b_1 \rangle^\perp$, συνεπώς θα υπάρχει $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας C, έτσι ώστε

$$(Ab_2, Ab_3, \ldots, Ab_n) = (b_2, b_3, \ldots, b_n) \cdot C.$$

Εδώ οι δύο παρενθέσεις συμβολίζουν $n \times (n-1)$ πίνακες με τις αναγραφόμενες $n-1$ στήλες $Ab_2, \ldots, Ab_n$ και $b_2, \ldots, b_n$, αντιστοίχως. Επίσης, η παραπάνω ισότητα σημαίνει ότι οι στήλες $Ab_2, \ldots Ab_n$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $b_2, \ldots, b_n$ και οι στήλες του C περιέχουν ακριβώς τους συντελεστές με τους οποίους συνδυάζονται οι b_i για να προκύψουν οι στήλες Ab_j.

13. Αυτά που αναφέρονται στο (12) ισοδυναμούν με το ότι ο πίνακας $B = (b_1, \ldots, b_n)$ με στήλες τα παραπάνω διανύσματα ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση πινάκων:

$$AB = BD \quad (\text{ισοδύναμα, } B^{-1}AB = D), \text{ όπου} \quad D = \left(\begin{array}{c|ccc} \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι ο C είναι $(n-1)\times(n-1)$ ορθογώνιος πίνακας. Δεξιά έχουμε μιά διάσπαση πίνακα, όπως λέγεται, σε 4 «μπλόκ» πινάκων, με αντίστοιχες διαστάσεις 1×1, $\quad 1 \times (n-1)$, $\quad (n-1) \times 1$, $\quad (n-1) \times (n-1)$.

14. Αν ο $n \times n$ ορθογώνιος πίνακας A έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές $c \pm is = \cos\phi \pm i \sin\phi$ (άρα $s \neq 0$) και b_1 είναι αντίστοιχο ιδιοδιανύσματα (στο $\mathbb{C}^n$) της ιδιοτιμής $c+is$, τότε το $\overline{b_1}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $c-is$, διότι $Ab_1 = (c+is)b_1 \Rightarrow A\overline{b_1} = (c-is)\overline{b_1}$. Ακόμη, αν $b_1 = u_1 + iv_1$ με $u_1, v_1 \in \mathbb{R}^n$, τότε $A(u_1+iv_1) = (c+is)(u_1+iv_1) = cu_1 - sv_1 + i(su_1 + cv_1)$, απ' όπου προκύπτουν οι σχέσεις

$$Au_1 = cu_1 - sv_1 \quad \text{και} \quad Av_1 = su_1 + cv_1.$$

15. Αναφερόμενοι στο (14), για το ιδιοδιάνυσμα $b_1 \in \mathbb{C}^n$, τα αντίστοιχα διανύσματα $u_1, v_1 \in \mathbb{R}^n$ έχουν το ίδιο μήκος (νόρμα) και είναι κάθετα μεταξύ τους. Αυτό συμβαίνει διότι γενικά «για ερμιτιανούς και ορθομοναδιαίους τελεστές, τα ιδιοδιανύσματα ως προς διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα, άρα και ανεξάρτητα». Έτσι, επειδή υποθέσαμε ότι $s \neq 0$, άρα $c + is \neq c - is$, τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $b_1, \overline{b_1}$ είναι κάθετα, οπότε $0 = \langle b_1, \overline{b_1} \rangle = \langle u_1 + iv_1, u_1 - iv_1 \rangle = \langle u_1, u_1 \rangle + 2i\langle u_1, v_1 \rangle - \langle v_1, v_1 \rangle$. Έπεται ότι $\langle u_1, u_1 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle$ και $\langle u_1, v_1 \rangle = 0$. Μπορούμε λοιπόν, διαιρώντας το b_1 με το $\sqrt{\langle u_1, u_1 \rangle}$, να υποθέσουμε ότι τα u_1, v_1 άποτελούν ορθοκανονικό σύστημα που ικανοποιεί τις εξισώσεις του (14).

16. Συμπληρώνουμε πάλι τα u_1, v_1 σε μια ορθοκανονική βάση $u_1, v_1, b_3, b_4, \ldots, b_n$ του $\mathbb{R}^n$. Από τις εξισώσεις του (14) συμπεραίνουμε πάλι ότι τα Ab_i θα είναι γραμμικοί συνδυασμοί των b_j, άρα υπάρχει $(n-2) \times (n-2)$ πίνακας C, έτσι ώστε, όπως και στο (12), να έχουμε

$$(Ab_3, Ab_4, \ldots, Ab_n) = (b_3, b_4, \ldots, b_n) \cdot C.$$

17. Τα αναφερόμενα στα (14) και (16) συνοψίζονται, χρησιμοποιώντας πίνακες, ως εξής. Θεωρούμε πάλι τον πίνακα B με στήλες τα διανύσματα $u_1, v_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$. Τότε ο πίνακας AB έχει τη μορφή

$$AB = BD \quad (\text{ισοδύναμα, } B^{-1}AB = D), \text{ όπου} \quad D = \left(\begin{array}{cc|c} c & s & \multirow{2}{*}{0} \\ -s & c & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & C \end{array} \right).$$

Ο πίνακας D, που αποτελείται από μπλοκ 4 πινάκων και είναι πάλι ορθογώνιος, που σημαίνει ότι ο C είναι $(n-2) \times (n-2)$ ορθογώνιος.

18. Τα συμπεράσματα στα (13) και (17), δείχνουν ότι για κάθε πραγματική/μιγαδική ιδιοτιμή μπορούμε να βρούμε ορθογώνιο πίνακα B έτσι ώστε ο $D = B^{-1}AB$ να έχει τη μορφή «μπλοκ»

$$D = \left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right).$$

Στην περίπτωση πραγματικής ιδιοτιμής ο U είναι 1×1 πίνακας (=αριθμός) ± 1. Και στην περίπτωση μιγαδικής ιδιοτιμής ο U είναι 2×2 πίνακας

$$U = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}.$$

Και στις δύο περιπτώσεις ο C είναι πάλι ορθογώνιος με διάσταση μικρότερη αυτής του αρχικού A.

19. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για τον ορθογώνιο C του (18), βρίσκουμε πάλι άλλο ορθογώνιο B', έτσι ώστε και ο $D' = B'^{-1}CB'$ να έχει τη μορφή

$$D' = \left(\begin{array}{c|c} U' & 0 \\ \hline 0 & C' \end{array}\right).$$

Ο πίνακας B' έχει $(n-1)\times(n-1)$ διαστάσεις ή $(n-2)\times(n-2)$ διαστάσεις, ανάλογα με το αν η ιδιοτιμή είναι πραγματική ή μιγαδική. Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να τον «συμπληρώσουμε» σε ορθογώνιο πίνακα σε μορφή μπλοκ:

$$B'' = \left(\begin{array}{c|c} I_{1,2} & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right),$$

όπου ο $I_{1,2}$ είναι ο 1×1 πίνακας(=αριθμός) (1) στην περίπτωση πραγματικής ιδιοτιμής, ενω στην περίπτωση μιγαδικής είναι ο μοναδιαίος I_2 δύο διαστάσεων. Τότε εφαρμόζοντας τις διαδικασίες (17) και (18) στον A θα έχουμε βρει ορθογώνιους πίνακες $\{B, B''\}$ έτσι ώστε ο $B''^{-1}B^{-1}ABB'' = D''$ να έχει τη μορφή

$$D'' = \left(\begin{array}{c|c|c} U & 0 & 0 \\ \hline 0 & U' & 0 \\ \hline 0 & 0 & C' \end{array}\right).$$

Και πάλι ο U' θα είναι, όπως και στο (18), ή 1×1 πίνακας(=αριθμός) ± 1, ή 2×2 της μορφής

$$U' = \begin{pmatrix} c' & s' \\ -s' & c' \end{pmatrix},$$

ανάλογα με το αν η ιδιοτιμή του C που θα επιλέξουμε θα είναι πραγματική ή όχι.

20. Εδώ να σημειώσουμε ότι οι ιδιοτιμές των πινάκων $D, D'', \ldots$ είναι οι ίδιες με αυτές του A. Τούτο διότι οι πίνακες αυτοί είναι «όμοιοι» του A, καθώς

$$D = B^{-1}AB,\ D'' = B''^{-1}B^{-1}ABB'', \ldots$$

και «όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές».

21. Την διαδικασία μπορούμε να επαναλαμβάνουμε διαδοχικά με συστηματικό τρόπο, προτάσσοντας, ας πούμε, τις μιγαδικές ιδιοτιμές του εκάστοτε μικρότερης διάστασης ορθογώνιου πίνακα $A, C, C', C'', \ldots$ και περνώντας στις πραγματικές ιδιοτιμές, αν κάποιος απ' αυτούς δεν έχει πλέον μιγαδική ιδιοτιμή. Το γινόμενο των ορθογωνίων πινάκων $BB''\cdots$ που θα προκύπτουν θα είναι πάλι ορθογώνιος πίνακας και τελικά το γινόμενο όλων αυτών των πινάκων θα ορίζει ορθογώνιο πίνακα B_0 έτσι ώστε ο

$D_0 = B_0^{-1} A B_0$ να έχει τη μορφή (τα κενά κουτιά είναι όλο μηδενικά)

$$D_0 = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc|ccc}
c_1 & s_1 & & & & & & & & & \\
-s_1 & c_1 & & & & & & & & & \\
\hline
 & & c_2 & s_2 & & & & & & & \\
 & & -s_2 & c_2 & & & & & & & \\
\hline
 & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
\hline
 & & & & & & c_k & s_k & & & \\
 & & & & & & -s_k & c_k & & & \\
\hline
 & & & & & & & & \pm 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & \pm 1
\end{array}\right),$$

όπου $c_i = \cos\phi_i$, $s_i = \sin\phi_i$ για κατάλληλες γωνίες ϕ_i, που εκφράζουν τα ζευγάρια μιγαδικών-συζυγών ιδιοτιμών $c_i \pm s_i$ του αρχικού πίνακα A. Το τελικό συμπέρασμα είναι λοιπόν ότι «για κάθε ορθογώνιο πίνακα A, υπάρχει άλλος ορθογώνιος B_0, έτσι ώστε ο $B_0^{-1} A B_0 = D_0$ να έχει την παραπάνω "σχεδόν διαγώνια" μορφή».

22. Το συμπέρασμα στο (21) μπορεί να διατυπωθεί και αλλοιώς, αν παρατηρήσουμε ότι

$$B_0^{-1} A B_0 = D_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad A B_0 = B_0 D_0.$$

Από την δεύτερη ισότητα και τη μορφή του πίνακα D_0 συμπεραίνουμε ότι ο A απεικονίζει τον υπόχωρο V_1 που παράγουν τα b_1, b_2 στον εαυτό του, ορίζοντας σ' αυτόν μια «στροφή», ανάλογη με αυτή που ορίζει η R_ϕ^+ στο (7). Επίσης, απεικονίζει τον υπόχωρο V_2 που παράγουν τα b_3, b_4 στον εαυτό του ορίζοντας σ' αυτόν μιαν άλλη στροφή, και το ίδιο συμβαίνει για όλα τα 2×2 μπλοκ U_i του D_0. Καθένα τους περιγράφει τον τρόπο που ο πίνακας A δρα πάνω στον αντίστοιχο υπόχωρο V_i που παράγεται από τα b_{2i-1}, b_{2i}. Τα μπλοκ των ± 1 αντιστοιχούν σε μονοδιάστατους υπόχωρους $W_1, W_2, \ldots, W_{n-2k}$. Σε κάθε έναν από αυτούς ο A δρα, ανάλογα με το πρόσημο της ιδιοτιμής, είτε ως ταυτοτικός $Ax = x$, είτε ως συμμετρία $Ax = -x$. Συνολικά λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι «για κάθε $n \times n$ ορθογώνιο πίνακα, ο χώρος $\mathbb{R}^n$ διασπάται σε ένα ευθύ άθροισμα διδιάστατων χώρων V_i και μονοδιάστατων W_j

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_{n-2k},$$

έτσι ώστε, σε κάθε W_i ο A να δρα ως στροφή και σε κάθε W_j να δρα ως ταυτοτικός ή συμμετρία».