ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

Συμπληρωματικές ασκήσεις επανάληψης

Στις παρακάτω ασκήσεις:

✓ $A \cdot B$ συμβολίζει τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

✓ Τα στοιχεια του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{C}^n$ θεωρούνται διανύσματα-στήλες.

✓ Αν $x \in \mathbb{C}^n$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, το λx (δίχως σύμβολο πράξης μεταξύ λ και x) συμβολίζει τον πολλαπλασιασμό ‘‘βαθμωτό επί διάνυσμα’’. Αν δούμε το λ ως πίνακα 1×1, τότε έχει νόημα ο πολλαπλασιασμός *πινάκων* $x \cdot \lambda$ (με αυτή τη διάταξη γραμμένα τα x, λ και με το σύμβολο του πολλαπλασιασμού πινάκων μεταξύ τους. Παρατηρήστε ότι $\lambda x = x \cdot \lambda$.

✓ Για $z \in \mathbb{C}^n$, το $\bar{z}$ συμβολίζει το μιγαδικό συζυγές διάνυσμα και για μιγαδικό πίνακα A, με A^* συμβολίζομε τον συζυγή ανάστροφο του A.

1. Αν $a, b \in \mathbb{C}^n$ είναι μη μηδενικά διανύσματα, τότε ο $n \times n$ πίνακας $a \cdot b^T$ έχει τάξη 1.

2. (α′) Αποδείξτε τη σχέση $\langle x, b\rangle b = b \cdot b^* \cdot x$ για όλα τα $b, x \in \mathbb{C}^n$.
   (β′) Αν $\{b_1, \dots, b_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^n$, αποδείξτε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ ισχύουν οι σχέσεις $x = \langle x, b_1\rangle b_1 + \cdots + \langle x, b_n\rangle b_n$ και $x = (b_1 \cdot b_1^* + \cdots + b_n \cdot b_n^*)x$. Συμπεράνατε ότι $b_1 \cdot b_1^* + \cdots + b_n \cdot b_n^* = I_n$ (= ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας). Από αυτό συμπεράνατε ότι, για κάθε $n \times n$ πίνακα A ισχύει $A = A \cdot (b_1 \cdot b_1^* + \cdots + b_n \cdot b_n^*)$.

3. Έστω $\mathbb{C}^n = U \oplus W$, $\{a_1, \dots, a_k\}$ ορθοκανονική βάση του U και $\{b_1, \dots, b_m\}$ ορθοκανονική βάση του W $(k + m = n)$. Έστω $P_1 = a_1 \cdot a_1^* + \cdots + a_k \cdot a_k^*$ και $P_2 = b_1 \cdot b_1^* + \cdots + b_m \cdot b_m^*$.
   (α′) Αποδείξτε ότι, για κάθε $z \in \mathbb{C}^n$, το διάνυσμα $P_1 \cdot z$ είναι η προβολή του z στον U και $P_2 \cdot z$ είναι η προβολή του z στον W. Ειδικότερα, αν $U = \langle a\rangle$, όπου $a \in \mathbb{C}^n$ έχει μοναδιαίο μήκος (νόρμα), τότε η προβολή του z στον υπόχωρο $\langle a\rangle$ ισούται με $a \cdot a^* \cdot z$.
   (β′) Αποδείξτε ότι κάθε μη μηδενικό $u \in U$ είναι ιδιοδιάνυσμα του P_1 και κάθε μη μηδενικό $w \in W$ είναι ιδιοδιάνυσμα του P_2. Επιπλέον, δείξτε ότι $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$ και $P_1 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1 = \mathbf{0}$ (= μηδενικός $n \times n$ πίνακας).

4. Έστω μοναδιαίου μήκους (νόρμας) διάνυσμα $a \in \mathbb{C}^n$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $z \in \mathbb{C}^n$ το διάνυσμα $a \cdot z^T \cdot \bar{a}$ είναι η προβολή του z στον υπόχωρο $\langle a\rangle$.

5. Από τις ασκήσεις 3 (α′) και 4 βλέπομε ότι, αν το $a \in \mathbb{C}^n$ είναι μοναδιαίου μήκους, τότε, για κάθε $z \in \mathbb{C}^n$, η προβολή του z στον υπόχωρο $\langle a\rangle$ ισούται με $a \cdot a^* \cdot z$, αλλά και με $a \cdot z^T \cdot \bar{a}$. Αυτό σημαίνει ότι $a \cdot a^* \cdot z = a \cdot z^T \cdot \bar{a}$. Αποδείξτε την αλήθεια της τελευταίας σχέσης για όλα τα $a, z \in \mathbb{C}^n$ (δηλαδή, ακόμη κι αν το a δεν έχει νόρμα 1). Επαληθεύστε την για $a = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} -i \\ 3+2i \end{pmatrix}$.

6. (α′) Εάν ο M είναι διαγώνιος πίνακας με στοιχεία d, d^2, d^3 στη διαγώνιο ($d \neq 0$, υπολογίστε τον $B = M^{-1}AM$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ποιές είναι οι ιδιοτιμές του B και πώς σχετίζονται με τις αντίστοιχες του A;

(β′) Γενίκευση του ερωτήματος (α′). Έστω M ο $n \times n$ διαγώνιος πίνακας, του οποίου τα διαγώνια στοιχεία είναι $d, d^2, \ldots, d^n$ ($d \neq 0$) και A είναι ο $n \times n$ πίνακας, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με 1. Υπολογίστε τύπο για το (i, j)-στοιχείο του πίνακα $M^{-1}AM$.

Υπόδειξη. Μια πολύ χρήσιμη σχέση, που ισχύει γενικά για πίνακες A, B, των οποίων οι διαστάσεις επιτρέπουν τον πολλαπλασιασμό $A \cdot B$, είναι οι εξής:

(i-γραμμή $A \cdot B$) = (i-γραμμή A)$\cdot B$ και (j-στήλη $A \cdot B$) = $A \cdot$(j-στήλη B)

7. (α′) (Αναφέρεται γενικά σε διανυσματικούς χώρους.) Έστω διανυσματικός χώρος V, $\mathcal{B}$ βάση του V και L, M τελεστές του V. Αποδείξτε τα εξής: (i) Αν ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}$, τότε $L = M$ (δηλαδή, $L(v) = M(v)$ για κάθε $v \in V$). (ii) ${}_{\mathcal{B}}(L + M)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}} + {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}$.

(β′) Δείξτε ότι κάθε $n \times n$ άνω τριγωνικός πίνακας T, μπορεί να γραφεί (όχι με μοναδικό τρόπο) ως άθροισμα $T = T_1 + T_2$, με τους πίνακες T_1, T_2 *μη* αντιστρέψιμους.

(γ′) Δείξτε ότι κάθε γραμμικός τελεστής L του $\mathbb{C}^n$ γράφεται ως άθροισμα δύο *μη* αντιστρέψιμων γραμμικών τελεστών του $\mathbb{C}^n$.

Υπόδειξη. Έστω $\mathcal{B}$ μία βάση του $\mathbb{C}^n$ τέτοια ώστε ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}} = T$ άνω τριγωνικός (λήμμα του Schur). Από το (β′), έστω $T = T_1 + T_2$ με τους T_1, T_2 μη αντιστρέψιμους. Θεωρήστε τους τελεστές L_j, $j = 1, 2$ για τους οποίους ${}_{\mathcal{B}}(L_j)_{\mathcal{B}} = T_j$. Μετά, εφαρμόστε το (α′).