ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για την εβδομάδα 14 - 18 Μαΐου

Στις παρακάτω ασκήσεις, $A \cdot B$ συμβολίζει τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Τα στοιχεια του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{C}^n$ θεωρούνται διανύσματα-στήλες και A^T συμβολίζει τον ανάστροφο πίνακα. Για $z \in \mathbb{C}^n$, το $\bar{z}$ συμβολίζει το μιγαδικό συζυγές διάνυσμα και για μιγαδικό πίνακα A, με A^* συμβολίζομε τον συζυγή ανάστροφο του A.

1. Θεωρούμε τις απεικονίσεις f_1, f_2, f_3 με πεδίο ορισμού το $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, οι οποίες ορίζονται ως εξής: $f_1(u, v) = u \cdot v^T$, $f_2(u, v) = u^T \cdot v$, $f_3(u, v) = u^T \cdot \bar{v}$. Ποιο είναι το πεδίο τιμών κάθε μιας από αυτές; Για κάθε μία εξετάστε: Είναι γραμμική ως προς u; Είναι γραμμική ως προς v; Είναι γραμμική και ως προς τις δύο μεταβλητές u, v;

2. Δείξτε ότι, για κάθε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ μεταξύ των $\mathbb{C}$-διανυσματικών χώρων $\mathbb{C}^n$ και $\mathbb{C}$ υπάρχει διάνυσμα $a \in \mathbb{C}^n$, τέτοιο ώστε $f(z) = a^T \cdot z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}^n$.

3. Δείξτε ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ μεταξύ των $\mathbb{C}$-διανυσματικών χώρων $\mathbb{C}^n$ και $\mathbb{C}$ γράφεται υπό την μορφή $f(z) = a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n$, με σταθερές $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

4. Υπάρχει γραμμική απεικόνιση με πεδίο ορισμού τον $\mathbb{C}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^n$ και πεδίο τιμών τον $\mathbb{R}$ διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}$;

5. Περιγράψτε όλους τους 3×3 πίνακες, οι οποίοι είναι ταυτόχρονα, ερμιτιανοί, ορθομοναδιαίοι και διαγώνιοι. Πόσοι τέτοιοι πίνακες υπάρχου;

6. Πώς σχετίζεται η ορίζουσα ενός $n \times n$ μιγαδικού πίνακα A με αυτήν του A^*; Δείξτε ότι κάθε ερμιτιανός πίνακας έχει πραγματική ορίζουσα.

7. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων $A \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -15 & -4 \end{pmatrix} \right\}$.
   Για κάθε έναν από αυτούς τους πίνακες, υπολογίστε αντιστρέψιμο πίνακα Q, τέτοιον ώστε $Q^T A Q$ να είναι διαγώνιος.

8. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων $A \in \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.
   Για κάθε έναν από αυτούς τους πίνακες, υπολογίστε αντιστρέψιμο πίνακα Q, τέτοιον ώστε ο $Q^{-1} A Q$ να είναι άνω τριγωνικός.

9. Αν ο A είναι $n \times n$ πίνακας και $A^2 = -I$, ποιές είναι οι ιδιοτιμές του A; Δείξτε ότι αν, επιπλέον, ο A είναι πραγματικός, τότε ο n πρέπει να είναι άρτιος. Δώστε παράδειγμα τέτοιου πίνακα.

10. Εάν ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές $0, 1$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, αποδείξτε ότι ο A είναι συμμετρικός και, μετά, υπολογίστε τον ακριβώς. Τέλος, υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους του πίνακα A^2. Τί παρατηρείτε;

11. (α΄) Αποδείξτε ότι, για κάθε μιγαδικό $n \times n$ πίνακα A υπάρχει μιγαδικός αριθμός c, τέτοιος ώστε ο πίνακας $A + cI_n$ να είναι *μη* αντιστρέψιμος.
(β΄) Δώστε παράδειγμα πραγματικού πίνακα A, τέτοιου ώστε ο πίνακας $A + cI$ να είναι αντιστρέψιμος για κάθε $c \in \mathbb{R}$, όπου I είναι ο ταυτοτικός πίνακας ίσης διάστασης με τον A.

12. (α΄) Έστω n-διάστατος $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος V με εσωτερικό γινόμενο και $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ορθοκανονική βάση του V. Αποδείξτε ότι δύο διανύσματα $x, y \in V$ είναι ίσα αν και μόνο αν $\langle x, b_j \rangle = \langle y, b_j \rangle$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$.
(β΄) Έστω ότι A, B είναι $n \times n$ πραγματικοί πίνακες και ισχύει $x^T \cdot A \cdot y = x^T \cdot B \cdot y$ για κάθε ζευγάρι διανυσμάτων $x, y \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $A = B$.
Υπόδειξη. Αποδείξτε πρώτα ότι, αν $x^T \cdot z = x^T \cdot z'$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$, τότε $z = z'$.
(γ΄) (Εφαρμογή του (β΄).) Έστω ότι A, B είναι $n \times n$ πραγματικοί πίνακες και ισχύει $(A \cdot x)^T \cdot y = x^T \cdot B \cdot y$ για κάθε ζευγάρι διανυσμάτων $x, y \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $B = A^T$.

13. Έστω $n \times n$ πραγματικός πίνακας A, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $k \neq m$ πραγματικοί αριθμοί και ισχύει $A \cdot x = kx$ και $A^T \cdot y = my$. Αποδείξτε ότι $x^T \cdot y = 0$.

14. Έστω $n \times n$ μιγαδικοί πίνακες A, Q, T, με τον Q αντιστρέψιμο, τον T άνω τριγωνικό, για τους οποίους ισχύει η σχέση $Q^{-1}AQ = T$. Αποδείξτε ότι τα στοιχεία της διαγωνίου του T είναι οι ιδιοτιμές του A, με την κάθε μία από αυτές να εμφανίζεται τόσες φορές, όσες υποδηλώνει η αλγεβρική πολλαπλότητά της.

15. Έστω C-διανυσματικός χώρος V, πεπερασμένης διαστάσεως, L τελεστής του V, λ ιδιοτιμή του L και v ιδιοδιάνυσμα του L, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Έστω $W = \langle v \rangle^{\perp}$ και M ο τελεστής του W, που ορίζεται $M(w) = p(L(w))$, όπου $p : V \to W$ η απεικόνιση προβολής του V στον W. Αποδείξτε ότι, αν κάποιο $\mu \in C$ είναι ιδιοτιμή του M, τότε το μ είναι ιδιοτιμή και του L.
Υπόδειξη. Εξ υποθέσεως υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $w \in W$, τέτοιο ώστε $M(w) = \mu w$. Συμπεράνατε ποια μορφή έχει το $L(w)$. Στη συνέχεια, δείξτε ότι υπάρχουν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, τέτοια ώστε $L(z_1 v + z_2 w) = \mu(z_1 v + z_2 w)$.

16. Στον $\mathbb{C}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) έστω $z \in \mathbb{C}^n$. Αποδείξτε ότι αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι τα διανύσματα $z, \bar{z}$ γραμμικώς εξαρτημένα είναι να έχει το z τη μορφή $z = e^{i\phi}(r_1, \ldots, r_n) = (\cos\phi + i \sin\phi)(r_1, \ldots, r_n)$, όπου $r_1, \ldots, r_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί (δεν αποκλείεται κάποιοι από αυτούς να είναι αρνητικοί).