

Θεμέλια των Μαθηματικών - Εαρινό Εξάμηνο 2017-18,  
Διδάσκοντες: Ι. Αντωνιάδης, Α. Κουβιδάκης  
Φυλλάδιο 13 (επαναληπτικό)

1. Δείξτε με επαγωγή ότι για  $n \geq 1$  ισχύει η ισότητα

$$\binom{2n}{n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} 2^{2n}$$

2. Δείξτε με επαγωγή ότι ο αριθμός  $2^n + 1$  διαιρείται από το 3 για κάθε  $n$  περιττό.

3. α) Αν  $a, b \in \mathbb{Z}$  και  $(a, b) = 1$  τότε  $(a^n, b^n) = 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .  
β) Αν  $a, b \in \mathbb{Z}$  και  $n \in \mathbb{N}$  ναδειχθεί ότι  $\mu.κ.δ.(a^n, b^n) = (\mu.κ.δ.(a, b))^n$ .  
γ) Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό  $n$  ισχύει  $(2^n + 3^n, 2^{n+1} + 3^{n+1}) = 1$ .

4. Έστω  $a, b \in \mathbb{Z}$  με  $(a, b) = 1$  και  $8a + 13b \neq 0$ . Να δείξετε ότι το κλάσμα

$$\frac{3a + 5b}{8a + 13b}$$

είναι ανάγωγο.

5. Ένας μαθητής γράφει ένα διαγώνισμα με 13 ερωτήσεις από τις οποίες πρέπει να απαντήσει τις 10. Με πόσους τρόπους γίνεται αυτό αν πρέπει να απαντήσει οπωσδήποτε:

- α) Τις πρώτες δύο ερωτήσεις.  
β) Την πρώτη ή τη δεύτερη αλλά όχι και τις δύο.  
γ) Ακριβώς τρεις από τις πρώτες πέντε  
δ) Τουλάχιστον τρεις από τις πρώτες πέντε.

6. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε τα ψηφία  $1, 2, \dots, 9$  ώστε ανάμεσα στο 1 και στο 2 να υπάρχουν ακριβώς 3 ψηφία;

7. Να αποδείξετε ότι  $|(0, 1)| = |\mathbb{R}|$ .