

- Εξετάστε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι αριθμήσιμα. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
 - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{Q}\}$,
 - $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ είναι πρώτος}\}$,
 - $\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$,
 - \mathbb{C} ,
 - $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2^a 3^b, \text{ για κάποια } a, b \in \mathbb{N}\}$.
- Θεωρήστε το σύνολο S των σφαιρών στον χώρο \mathbb{R}^3 των οποίων τα κέντρα έχουν ρητές συντεταγμένες και των οποίων η ακτίνα είναι ρητός αριθμός. Δείξτε ότι το σύνολο S είναι αριθμήσιμο.
- Αποδείξτε ότι κάθε σύνολο ξένων διαστημάτων στο \mathbb{R} είναι αριθμήσιμο.
- Είναι το σύνολο όλων των λέξεων που μπορούμε να φτιάξουμε με το ελληνικό αλφάβητο αριθμήσιμο σύνολο; (Οι λέξεις δεν είναι κατ' ανάγκη υπαρκτές).
- Είναι το σύνολο όλων των λέξεων που μπορούμε να φτιάξουμε από ένα αριθμήσιμο-άπειρο αλφάβητο (π.χ. \mathbb{N}) αριθμήσιμο σύνολο;
- Έστω $A = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ και $B = (8, 15) \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $|A| = |B|$.
- Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ που ορίζεται ως $f(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$ είναι 1-1 και επί.
- Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $X_m = \{A \subseteq \mathbb{N}, |A| = m\}$. Δείξτε ότι το X είναι αριθμήσιμο (γράψτε το ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων με χρήση της ισότητας $\mathbb{N} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(n)$). Δείξτε ότι το σύνολο X_{fin} των πεπερασμένων υποσυνόλων του \mathbb{N} είναι αριθμήσιμο. Είναι το σύνολο $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \setminus X_{\text{fin}}$ αριθμήσιμο;
- Ρίχνουμε 4 ζάρια. Πόσες είναι οι διαφορετικές δυνατές τετράδες; Σέ πόσες από αυτές όλα τα ζάρια έχουν διαφορετική ένδειξη;
- Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να γραψουμε έναν φυσικό αριθμό n ως άθροισμα k το πλήθος μη αρνητικών ακεραίων, δηλ. $n = x_1 + \dots + x_k$, $x_i \in \mathbb{N}_0$. Υπόδειξη: σκεφτείτε τον αριθμό n ως ένα σύνολο από n ίδιες μπάλες και το παραπάνω άθροισμα ως ένα τρόπο να τις χωρίσουμε σε k -ομάδες (ενδεχομένως κάποιες από αυτές να είναι κενές).