

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

**Ασκήσεις για την εβδομάδα 5 - 11 Μαΐου**

1. Έστω  $n$ -διάστατος διανυσματικός χώρος  $V$ , υπόχωρος  $U$  του  $W$  και  $W = U^\perp$ . Από τη θεωρία είναι γνωστό ότι ορίζεται η απεικόνιση  $p : V \rightarrow W$  (προβολή του  $V$  στον  $W$ ) ως εξής: Αν  $v = u + w$ , όπου  $u \in U$  και  $w \in W$ , τότε  $p(v) = w$ . Μέσω αυτής μπορούμε, για κάθε τελεστή  $L$  του  $V$ , να ορίσουμε έναν τελεστή  $M$  του  $W$  ως εξής:  $M(w) = p(L(w))$  για κάθε  $w \in W$ .

Έστω τώρα  $V = \mathbb{R}^3$  και  $U = \langle v \rangle$ , όπου  $v = (1, -1, 1)$ . Έστω ο τελεστής  $L(x) = Ax$ , όπου  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  και  $M$  ο τελεστής του  $W$ , όπως ορίστηκε παραπάνω. Βρείτε μία βάση  $\{w_1, w_2\}$  του  $W$  και υπολογίστε τα  $M(w_1)$  και  $M(w_2)$ .

2. Για καθέναν από τους παρακάτω πίνακες  $A$ , ακολουθήστε τη διαδικασία διαγωνιοποίησης, που περιγράφεται στην ιστοσελίδα του μαθήματος (εβδομάδα 7-13 Μαΐου) και υπολογίστε ορθογώνιο πίνακα  $Q$  και διαγώνιο πίνακα  $D$ , τέτοιους ώστε  $Q^T A Q = D$ . Για διευκόλυνση δίδεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο κάθε πίνακα.

$A$	χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $A$ .
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$-(x-1)^2(x-4)$
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$-x(x-3)^2$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$-(x+3)(x-3)^2$

3. Για καθέναν από τους παρακάτω πίνακες  $A$ , ακολουθήστε τη διαδικασία τριγωνοποίησης, που περιγράφεται στην ιστοσελίδα του μαθήματος (εβδομάδα 7-13 Μαΐου) και υπολογίστε αντιστρέψιμο πίνακα  $Q$  τέτοιον ώστε ο πίνακας  $Q^{-1} A Q$  να είναι άνω τριγωνικός, τον οποίο και υπολογίσετε. Για διευκόλυνση δίδεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο κάθε πίνακα και προτείνεται η “βολική” ιδιοτιμή μέσω της οποίας θα

επιλέξτε το  $v_1$ .

$A$	χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $A$	για $v_1$ επιλέξτε ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$-x(x-2)^2$	απλή ιδιοτιμή
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$-x(x-2)^2$	διπλή ιδιοτιμή
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$-x^2(x-1)$	διπλή ιδιοτιμή