ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Τετάρτης 25 Απριλίου

1. Δείξτε ότι ο πίνακας $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}-i}{2} \end{pmatrix}$ είναι ορθομοναδιαίος.

2. (α′) Δείξτε ότι ένας πραγματικός πίνακας που είναι ταυτόχρονα ορθογώνιος και συμμετρικός έχει ιδιοτιμές ± 1.
   (β′) Στον πίνακα A συμπληρώστε κατάλληλα τα κενά και βρείτε τιμές για τα a, b, c, d, ώστε ο $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ & c & 0 \\ & & d \end{pmatrix}$ να είναι όπως στο ερώτημα (α′) και διαφορετικός από τον $\pm I_3$.
   Επαληθεύστε ότι οι ιδιοτιμές αυτού του πίνακα είναι ± 1.

3. Έστω L ερμιτιανός τελεστής σε χώρο πεπερασμένης διάστασης V και U αναλλοίωτος υπόχωρος του V (δηλαδή $L(U) \subseteq U$). Δείξτε ότι το ορθογώνιο συμπλήρωμα $U^{\perp}$ του U είναι επίσης αναλλοίωτος υπόχωρος.

4. Δείξτε ότι ένας πραγματικός 2×2 πίνακας είναι ορθογώνιος τότε και μόνον τότε, εάν είναι της μορφής $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ ή της μορφής $\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$.
   Υπόδειξη. (α′) Έστω $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ πραγματικός, ορθογώνιος πίνακας. Βρείτε ποιες σχέσεις πρέπει να ικανοποιούν οι a, b, c, d. (β′) Παρατηρήστε ότι, αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $x^2 + y^2 = 1$, τότε υπάρχει $\omega \in [0\,,\,2\pi)$, τέτοιο ώστε $x = \cos\omega$ και $y = \sin\omega$. Αυτό φαίνεται πολύ εύκολα μ' ένα σχήμα. (γ′) Ευκαιρία να θυμηθήτε τους τύπους $\sin(\omega_1 \pm \omega_2) = \ldots$ και $\cos(\omega_1 \pm \omega_2) = \ldots$

Quiz

Στα τρία πρώτα από τα παρακάτω ερωτήματα, οι A, B είναι τετραγωνικοί μιγαδικοί πίνακες. Αποδείξτε τα εξής:

1. Αν ο A είναι ορθομοναδιαίος, τότε και ο A^* είναι ορθομοναδιαίος.

2. Αν ο A είναι ορθομοναδιαίος, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και ο A^{-1} είναι ορθομοναδιαίος.

3. Αν οι A, B είναι ορθομοναδιαίοι, τότε και AB και BA είναι ορθομοναδιαίοι. Δεν ισχύει, όμως, το ίδιο και για το άθροισμα. Δώστε αντιπαράδειγμα.

4. Το άθροισμα δύο ερμιτιανών τελεστών είναι επίσης ερμιτιανός τελεστής.