ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

**Ασκήσεις για το εργαστήριο της Δευτέρας 23 Απριλίου**

1. Αποδείξτε ότι οι πίνακες $AA^*$ και $A^*A$ είναι ερμιτιανοί οποιοσδήποτε κι αν είναι ο τετραγωνικός μιγαδικός πίνακας $A$.

2. Έστω ο $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}^3$, εφοδιασμένος με το σύνηθες ἐσωτερικό γινόμενο και $L$ ο γραμμικός τελεστής του $\mathbb{C}^3$, που ορίζεται από τη σχέση

$$L(z_1, z_2, z_3) = (8z_1 + (1 + 2i)\, z_2 + (-2 - 5i)\, z_3, (1 - 2i)\, z_1 + z_2 - z_3, (-2 + 5i)\, z_1 - z_2 + 5z_3).$$

Αποδείξτε ότι ο $L$ είναι ερμιτιανός χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του ερμιτιανού τελεστή.

3. (α′) Έστω $n$-διάστατος $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος $V$, εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο και $L$ γραμμικός τελεστής του $V$. Έστω μια οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ του $V$. Αποδείξτε ότι ο $L$ είναι ερμιτιανός, αν και μόνο αν $\langle L(v_i), v_j\rangle = \langle v_i, L(v_j)\rangle$ για κάθε συνδυασμό δεικτών $i$, $j$.
(β′) Αποδείξτε ότι ο τελεστής $L$ της ασκήσεως (2) είναι ερμιτιανός κάνοντας χρήση του (α′).

4. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένο με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Έστω $L$ συμμετρικός γραμμικός τελεστής του $\mathbb{R}^3$ και τα διανύσματα $u, v$ με αντίστοιχα μήκη 10 και 5. Αν είναι γνωστό ότι τα μήκη των $L(u)$ και $L(v)$ είναι, αντιστοίχως, $3/2$ και 3 και η γωνία των $L(u), v$ έχει συνημίτονο $1/3$, υπολογίστε το συνημίτονο της γωνίας των $L(v), u$.

5. Στο μάθημα αποδείξαμε την πρόταση: *Κάθε πραγματικός συμμετρικός πίνακας έχει πραγματικές ιδιοτιμές.* Χωρίς να χρησιμοποιήσετε αυτή την πρόταση, αποδείξτε ότι κάθε $2 \times 2$ πραγματικός συμμετρικός πίνακας έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

6. Έστω $A$ πραγματικός $m \times n$ πίνακας.
(α′) Αποδείξτε ότι όλες οι ιδιοτιμές του $AA^T$ είναι πραγματικές.
(β′) [Σχετίζεται με το (α′), αλλά αποδεικνύεται με προηγούμενη ύλη. Ισχύει και για μη πραγματικό πίνακα $A$.]
Αν $m > n$, αποδείξτε ότι το 0 είναι ιδιοτιμή του $AA^T$ και $\det(AA^T) = 0$.
(γ′) [Εφαρμογή του (β′).] Αποδείξτε την ταυτότητα

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1b_1 + a_2b_2 & a_1c_1 + a_2c_2 \\ a_1b_1 + a_2b_2 & b_1^2 + b_2^2 & b_1c_1 + b_2c_2 \\ a_1c_1 + a_2c_2 & b_1c_1 + b_2c_2 & c_1^2 + c_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

δίχως να αναπτύξετε την ορίζουσα.