ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2017-18
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 204 ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 6

Άσκηση 6.1 Υπολογίστε τα

$$\left(\frac{8}{17}\right), \left(\frac{3}{23}\right), \left(\frac{100}{31}\right), \left(\frac{568}{197}\right).$$

Άσκηση 6.2 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω ισοτιμίες έχει λύση:

α′. $x^2 \equiv 2 \pmod{37}$,

β′. $x^2 \equiv 7 \pmod{19}$,

γ′. $x^2 \equiv 12 \pmod{29}$.

Άσκηση 6.3 Εξετάστε ποιοί περιττοί διψήφιοι πρώτοι διαιρούν αριθμούς της μορφής $n^2 + 1$ για $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 6.4 Εξετάστε εάν οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακέραια λύση και υπολογίστε μία τέτοια, εφόσον υπάρχει.

α′. $x^2 + 7y - 2 = 0$,

β′. $x^2 + 13y - 5 = 0$.

Άσκηση 6.5 Προσδιορίστε για ποιούς πρώτους p έχει λύση η ισοτιμία

$$x^2 \equiv 7 \pmod{p}.$$

Άσκηση 6.6 Έστω p πρώτος αριθμός τέτοιος ώστε $p \equiv 3 \pmod 4$. Εάν $a, b \in \mathbb{Z}$, με $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod p$, δείξτε ότι $a \equiv b \equiv 0 \pmod p$.

Άσκηση 6.7 Χρησιμοποιώντας το

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{, αν } p \equiv \pm 1 \pmod 8 \\ -1 & \text{, αν } p \equiv \pm 3 \pmod 8 \end{cases}$$

δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί της μορφής $8n - 1$.