

Θεμέλια των Μαθηματικών - Εαρινό Εξάμηνο 2017-18,  
Διδάσκοντες: Ι. Αντωνιάδης, Α. Κουβιδάκης  
Φυλλάδιο 9

1. Αν  $p$  πρώτος αριθμός και  $p \mid a_1 \cdots a_n$ ,  $a_i \in \mathbb{Z}$  τότε  $p \mid a_i$ , για κάποιο  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Αν, επίσης, όλοι οι  $a_i$  είναι πρώτοι αριθμοί, τότε  $p = a_i$  για κάποιο  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Τέλος αν  $p \mid a^k$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ , τότε  $p^k \mid a^k$ .
2. Αν ο φυσικός  $m$  είναι σύνθετος (δηλ. δεν είναι πρώτος) τότε έχει έναν πρώτο διαιρέτη  $p$  με  $p \leq \sqrt{m}$ .
3. Αν  $p_n$  είναι ο  $n$ -στος σε αύξουσα σειρά πρώτος αριθμός, να αποδείξετε ότι  $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$ .
4. Να αποδειχθεί ότι  $2^{n+m-2} \geq mn$ , όπου  $m, n \geq 1$  φυσικοί αριθμοί.
5. Να αποδειχθεί  $2^n > n^3$ , για κάθε φυσικό αριθμό  $n > 10$ .
6. Να αποδειχθεί  $5 \mid 3 \cdot 7^n + 2 \cdot 2^n$ , για κάθε φυσικό  $n \in \mathbb{N}$ .
7. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό  $n$  το κλάσμα  $\frac{21n+4}{14n+3}$  είναι ανάγωγο (δηλ. δεν απλοποιείται).
8. Η διαίρεση του 802 με έναν ακέραιο  $a$  δίδει πηλίκο 14. Να βρεθούν οι τιμές του  $a$  και των αντιστοίχων υπολοίπων της διαίρεσης.
9. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $1^{47} + 2^{47} + 3^{47} + 4^{47} + 5^{47} + 6^{47}$  διαιρείται από το 7 (Υπόδειξη: αν  $n$  περιττός τότε  $a + b \mid a^n + b^n$ ).
10. Γράψτε τον τύπο της Ευκλείδειας διαίρεσης τού  $a$  διά τού  $b$  στις παρακάτω περιπτώσεις:
  - α)  $a = -327$ ,  $b = 12$ .
  - β)  $a = 453$ ,  $b = -8$ .
  - γ)  $a = -372$ ,  $b = -11$ .
11. Έστω  $a, b, c, d, k \in \mathbb{Z}$ .
  - α) Αν  $k \neq 0$ , δείξτε ότι  $\mu.κ.δ.(ka, kb) = |k| \mu.κ.δ.(a, b)$ .
  - β) Δείξτε ότι  $\mu.κ.δ.(ab, c) = 1$  αν και μόνον αν  $\mu.κ.δ.(a, c) = 1$  και  $\mu.κ.δ.(b, c) = 1$ .
12. Έστω  $n, m \in \mathbb{N}$  με  $n, m \geq 1$ . Δείξτε ότι  $2^n - 1 \mid 2^{nm} - 1$ . Συμπεράνατε ότι αν  $2^n - 1$  είναι πρώτος αριθμός τότε και ο  $n$  είναι πρώτος.
13. Έστω  $k, r \in \mathbb{N}$ . Δείξτε ότι  $2^{2^r} + 1 \mid 2^{2^r(2^k+1)} + 1$ . Συμπεράνατε ότι αν ο  $2^n + 1$  είναι πρώτος αριθμός τότε το  $n$  είναι μιά δύναμη τού 2.