

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφίλος - Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Τετάρτης 18 Απριλίου

1. Στον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^5 , εφοδιασμένο με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, έστω V ο διανυσματικός υπόχωρος, που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (0, -1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $v_3 = (-1, 0, -6, 3, 0)$, $v_4 = (-12, 0, 0, 14, 0)$.
(α') Ξεκινώντας από τη βάση $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ και ακολουθώντας τη διαδικασία Gram-Schmidt κατασκευάστε ορθογώνια βάση του V .
(β') Από την ορθογώνια βάση του (β') κατασκευάστε ορθοκανονική βάση του V .
2. Στον \mathbb{C} -διανυσματικό χώρο \mathbb{C}^4 , εφοδιασμένο με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, έστω V ο διανυσματικός υπόχωρος, που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (1, -1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1 + i, 1 + 3i)$, $v_3 = (2, 0, -6 + 3i, 7 + 3i)$.
(α') Διαπιστώστε ότι $\langle v_i, v_j \rangle \neq 0$ για $i \neq j$.
(β') Ξεκινώντας από τη βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ και ακολουθώντας τη διαδικασία Gram-Schmidt κατασκευάστε ορθογώνια βάση του V .
(γ') Από την ορθογώνια βάση του (β') κατασκευάστε ορθοκανονική βάση του V .
3. Έστω $\mathbb{R}_2[x]$ ο \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό ≤ 2 , εφοδιασμένος με το εξής εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt \quad \forall f(x), g(x) \in \mathbb{R}_2[x].$$

- (α') Αποδείξτε ότι η βάση $\{1, x, x^2\}$ του $\mathbb{R}_2[x]$ δεν είναι ορθογώνια.
(β') Ξεκινώντας από τη βάση $\{1, x, x^2\}$ και ακολουθώντας τη διαδικασία Gram-Schmidt κατασκευάστε ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}_2[x]$.
(γ') Από την ορθογώνια βάση του (β') κατασκευάστε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_2[x]$.
4. Έστω \mathbb{C} -διανυσματικός χώρος V διαστάσεως 3, εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο και $\{v_1, v_2, v_3\}$ ορθοκανονική βάση του V . Με πολύ λίγες πράξεις υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο $\langle (1 + i)v_1 + 2iv_2 - 3v_3, (2 - 3i)v_1 + (1 - i)v_2 - 2iv_3 \rangle$.