

1. Έστω A, B, C σύνολα. Εξετάστε αν ισχύει η ισότητα

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

2. Εξετάστε αν οι παρακάτω δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες

Πρόταση 1: $P \wedge Q \Rightarrow \neg P \wedge Q,$

Πρόταση 2: $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q).$

3. Έστω A, B σύνολα.

Δείξτε, με εις άτοπον απαγωγή, ότι $\mathfrak{P}(A) = \mathfrak{P}(B)$ αν και μόνον αν $A = B$.

Δείξτε ότι $\mathfrak{P}(A \setminus B) = (\mathfrak{P}(A) \setminus \mathfrak{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$.

4. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1 ή επί:

α) $\phi_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $\phi(a) = (a + 1, a - 1)$.

β) $\phi_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $\phi(a) = (a^2 + 1, a^2 - 1)$.

γ) $\phi_3 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $\phi(a) = (a^2 + 1, a^3 - 1)$.

δ) $\phi_4 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $\phi(a, b) = (a + 1, b - 1)$.

ε) $\phi_5 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $\phi(a, b) = (a - b, a + b)$.

5. Με τον συμβολισμό της άσκησης 4, βρείτε ποιές από τις παρακάτω συνθέσεις ορίζονται και στην περίπτωση που ορίζονται βρείτε τον τύπο τους:

$$\phi_1 \circ \phi_2, \phi_2 \circ \phi_5, \phi_4 \circ \phi_1, \phi_4 \circ \phi_5, \phi_5 \circ \phi_3.$$

6. Με τον συμβολισμό της άσκησης 4, βρείτε τα

α) $\phi_1(\{2, 3\})$.

β) $\phi_1^{-1}(\{(0, 0), (2, 0), (4, 6), (6, 4)\})$.

γ) $\phi_1^{-1}(2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z})$, όπου $2\mathbb{Z}$ το σύνολο των άρτιων ακεραίων.

7. Στο σύνολο $X = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ ορίζουμε την σχέση ρ ως εξής:

$$(a, b) \rho (a', b') \text{ αν και μόνον αν } ab' = ba'.$$

Δείξτε ότι είναι σχέση ισοδυναμίας και βρείτε την κλάση ισοδυναμίας των στοιχείων $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$ και $(2, 1)$.

8. Εξετάστε αν η παρακάτω σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών:

$$a \rho b \text{ αν και μόνον αν } a - b \in \mathbb{Q}.$$

9. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις η \star ορίζει προσεταιριστική πράξη στο σύνολο \mathbb{N} των φυσικών:

α) $a \star b = \min(a, b + 2)$.

β) $a \star b = a + 2b$.

γ) $a \star b = a + b + 5$.

10. Έστω \star μια πράξη σε σύνολο X με την ιδιότητα ότι για κάθε $a, b \in X$: $a \star b = a$. Δείξτε ότι η πράξη είναι προσεταιριστική. Μπορεί να είναι αντιμεταθετική;

11. Συμβολίζουμε ως $[a]_n$ τα στοιχεία του συνόλου \mathbb{Z}_n των ακεραίων modulo n . Βρείτε $a \in \mathbb{Z}$, με $0 \leq a \leq n - 1$, τέτοιο ώστε:

α) $[136]_7 = [a]_7$ στο \mathbb{Z}_7 .

β) $[-32]_7 = [a]_7$ στο \mathbb{Z}_7 .

γ) $[a]_{12} = [-532]_{12}$ στο \mathbb{Z}_{12} .

δ) $2[a]_9 = [5]_9$ στο \mathbb{Z}_9 .

12. Βρείτε όλες τις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων:

(α) $x^2 - [2]_6 x + [2]_6 = [0]_6$ στο \mathbb{Z}_6 .

(β) $x^2 + [2]_6 x - [2]_6 = [0]_6$ στο \mathbb{Z}_6 .

(γ) $x^3 = [2]_5$ στο \mathbb{Z}_5 .

13. Εξετάστε αν είναι ταυτολογία η πρόταση: $(P \Rightarrow Q) \vee (\neg P)$.

14. Ποιά είναι η αντιστροφοαντίθετη της πρότασης: *Αν αύριο δεν βρέξει, θα ποτίσω τον κήπο.*