ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Δευτέρας 16 Απριλίου

1. Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\|\cdot\|$ η νόρμα που ορίζεται μέσω του εσωτερικού γινομένου.
   (α΄) Αποδείξτε ότι, αν τα $u, v \in V$ έχουν ίσες νόρμες, τότε τα διανύσματα $u+v, u-v$ είναι ορθογώνια.
   (β΄) Εφαρμόζοντας το (α΄) αποδείξτε ότι, αν μια εγγεγραμμένη σε κύκλο γωνία βαίνει σε ημικύκλιο, τότε η γωνία αυτή είναι ορθή.

2. Στο μάθημα αποδείξαμε τον *νόμο του παραλληλογράμου* (βλ. Πρόταση 7.4 των Σημειώσεων Χρ. Κουρουνιώτη).
   (α΄) Με τη βοήθεια αυτού του "νόμου" αποδείξτε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο $ABCD$ ισχύει η σχέση $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$ (AC, BD είναι οι διαγώνιοι).
   (β΄) Ο νόμος του παραλληλογράμμου αποδείχθηκε όταν η νόρμα του διανυσματικού χώρου ορίζεται μέσω εσωτερικού γινομένου. Θεωρήστε την ℓ_1 νόρμα (Παράδειγμα 7.2 των Σημειώσεων Χρ. Κουρουνιώτη) στον $\mathbb{R}^2$, και τα διανύσματα $u = (1, 0), v = (0, 1)$ και αποδείξτε ότι ο νόμος του παραλληλογράμμου δεν ισχύει γι' αυτά τα διανύσματα. Συμπεράνατε ότι η ℓ_1 νόρμα δεν είναι δυνατόν να ορισθεί μέσω εσωτερικού γινομένου.

3. Θεωρούμε τον $\mathbb{C}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^2$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο (Προσοχή! Το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{C}^2$ δεν είναι το ίδιο με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^2$.) Για τα διανύσματα u, v υπολογίστε τα $\langle u, v\rangle$, $\|u\|, \|v\|$, $\|u-v\|$ (= "απόσταση" των u, v), στις εξής περιπτώσεις:
   (α΄) $u = (2-i, 3+2i)$, $v = (3-2i, 2+i)$.
   (β΄) $u = (2-3i, -2+3i)$, $v = (1, 1)$.

4. Έστω διανυσματικός χώρος V με εσωτερικό γινόμενο και X, Y υπόχωροι του V.
   (α΄) Αν κάθε διάνυσμα του X είναι ορθογώνιο προς κάθε διάνυσμα του Y, τότε $X \cap Y = \{0\}$.
   (β΄) Έστω ότι $\mathcal{B}$ είναι βάση του X, $\mathcal{C}$ είναι βάση του Y και κάθε διάνυσμα της $\mathcal{B}$ είναι ορθογώνιο προς κάθε διάνυσμα της $\mathcal{C}$. Τότε, αποδείξτε ότι $X \cap Y = \{0\}$.
   (γ΄) Αν ισχύουν οι υποθέσεις του (α΄) είτε του (β΄) και, επιπλέον, $\dim X + \dim Y = \dim V$, δείξτε ότι $V = X \oplus Y$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι, καθένας από τους X, Y είναι *ορθογώνιο συμπλήρωμα* του άλλου και συμβολίζομε: $Y = X^\perp$, $X = Y^\perp$.

5. (α′) Εφαρμόστε την άσκηση 4 στην εξής πολύ σημαντική περίπτωση. Θεωρήστε τον $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Έστω $m \times n$ πραγματικός πίνακας. Δείτε τους χώρους $\mathcal{R}(A^T)$ (χώρος γραμμών του A) και $\mathcal{N}(A)$ (μηδενόχωρος του A) ως υποχώρους του $\mathbb{R}^n$ και δείξτε ότι έκαστος είναι ορθογώνιο συμπλήρωμα του άλλου· βλ. άσκηση 4 (γ′).

   (β′) Θεωρήστε τον $\mathbb{R}^4$ εφοδιασμένο με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και υπολογίστε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^\perp$ του υποχώρου $V = \langle (1,0,-1,2),\ (1,1,1,-1) \rangle$.

6. Θεωρήστε τον $\mathbb{R}^3$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και τα διανύσματά του $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,-3)$, $v_3 = (5,-4,-1)$.

   (α′) Αποδείξτε ότι τα v_1, v_2, v_3 είναι ανά δύο ορθογώνια και υπολογίστε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $v_1 - v_2$ και $v_1 + v_3$.

   (β′) Βρείτε τα μοναδιαία διανύσματα, τα οποία είναι ταυτόχρονα ορθογώνια στα $v_1 - v_2$ και $v_1 + v_3$.

   (γ′) Βρείτε τα διανύσματα, τα οποία ανήκουν στον χώρο, που παράγεται από τα $v_1 - v_2$ και $v_1 + v_3$ και είναι ορθογώνια στο $2v_2 + v_3$.

7. Έστω ότι $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι θετική συνεχής συνάρτηση. Έστω $\mathbb{R}[x]$ ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων μεταβλητής x. Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων p, q ορίζομε

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 f(t)p(t)q(t)\,dt.$$

   (α′) Αποδείξτε ότι η παραπάνω σχέση ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}[x]$.

   (β′) Έστω ότι $f(x) = x + 1$. Αποδείξτε ότι, τότε, ως προς το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο, τα πολυώνυμα $2x - 1$ και $x - 2$ είναι ορθογώνια. Υπολογίστε τη νόρμα καθενός από τα πολυώνυμα αυτά.