ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Δευτέρας 26 Μαρτίου

1. Έστω $n \times n$ μιγαδικός πίνακας A και το χαρακτηριστικό πολυώνυμό του έχει ρίζες $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ με αντίστοιχες αλγεβρικές πολλαπλότητες $r_1, \dots, r_k$ (άρα $r_1 + \cdots + r_k = n$). Έστω ότι ο A διαγωνιοποιείται, δηλαδή, υπάρχει διαγώνιος πίνακας D και αντιστρέψιμος πίνακας B, τέτοιοι ώστε $A = BDB^{-1}$. Αποδείξτε ότι, τότε, τα διαγώνια στοιχεία του D είναι, το λ_1 επαναλαμβανόμενο r_1 φορές, το λ_2 επαναλαμβανόμενο r_2 φορές,... το λ_k επαναλαμβανόμενο r_k φορές.

   Υπόδειξη: Αν $A = BDB^{-1}$, τότε πώς σχετίζονται τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των πινάκων A και D;

2. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

   (α΄) Αποδείξτε ότι μοναδική ιδιοτιμή του A είναι το 1 και ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα αυτής της ιδιοτιμής είναι 1, ενώ η αλγεβρική πολλαπλότητά της είναι 3.

   (β΄) Αποδείξτε ότι ο πίνακας A είναι μη διαγωνιοποιήσιμος, δηλαδή, δεν υπάρχει διαγώνιος πίνακας D και αντιστρέψιμος πίνακας B, τέτοιοι ώστε $A = BDB^{-1}$.

   Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την άσκηση 1.

   (γ΄) Έστω ο τελεστής L του $\mathbb{R}^3$, που ορίζεται από τη σχέση $L(x) = Ax$. Υπολογίστε τον πίνακα $T = {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$, όπου $\mathcal{B} = \{(2,1,1),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$, και διαπιστώστε ότι είναι άνω τριγωνικός. Έστω B ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα της $\mathcal{B}$. **Δίχως πράξεις** αποδείξτε τα εξής:

   (i) ${}_{\mathcal{E}}I_{\mathcal{B}} = B$, όπου I είναι ο ταυτοτικός τελεστής του $\mathbb{R}^3$ και $\mathcal{E}$ είναι η στάνταρ βάση του $\mathbb{R}^3$.

   (ii) ${}_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{E}} = B^{-1}$

   (iii) $A = BTB^{-1}$. Αφού ο T είναι τριγωνικός πίνακας, η τελευταία σχέση μας λέει ότι «ο A τριγωνοποιείται».

3. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & b^2 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, όπου $abc \neq 0$. Για κάθε ιδιοτιμή υπολογίστε τον αντίστοιχο ιδιόχωρο. Επιλέξτε ιδιοδιανύσματα b_1, b_2, b_3, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές. Έστω η βάση $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ (γιατί είναι βάση;) και B ο πίνακας με στήλες τα b_1, b_2, b_3. Ακολουθώντας διαδικασία ανάλογη με αυτήν της ασκήσεως 2 αποδείξτε, **δίχως πράξεις**, ότι $A = BDB^{-1}$, όπου D είναι διαγώνιος πίνακας με τις ιδιοτιμές του A στη διαγώνιό του.