ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις που διδάχθηκαν στις διαλέξεις της εβδομάδας 19 - 23 Μαρτίου

1. Διαπιστώστε τα εξής:

   (α′) Οι ιδιοτιμές του πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ είναι οι εξής: -1 (αλγεβρικής πολλαπλότητας 2) και 2 (αλγεβρικής πολλαπλότητας 1). Οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι είναι $\langle(1,1,1)\rangle$ και $\langle(-1,1,0)\rangle$. Άρα, η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής -1 είναι 1, μικρότερη από την αλγεβρική πολλαπλότητά της.

   (β′) Οι ιδιοτιμές του πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι οι εξής: 2 (αλγεβρικής πολλαπλότητας 2) και 1 (αλγεβρικής πολλαπλότητας 1). Οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι είναι $\langle(0,1,0),(1,0,0)\rangle$ και $\langle(1,-3,1)\rangle$. Άρα, η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 2 είναι 2, ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητά της.

   (γ′) Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ έχει τρεις διαφορετικές ιδιοτιμές: $1,-1,2$ και οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι είναι $\langle(1,-1,1)\rangle$, $\langle(1,1,1)\rangle$ και $\langle(-1,1,0)\rangle$. Άρα, και για τις τρεις ιδιοτιμές η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι 1, ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα.

2. Έστω διανυσματικός χώρος V και L τελεστής του V, τέτοιος ώστε $L^2 = I$ (= ο ταυτοτικός τελεστής του V· όταν γράφομε L^2 εννοούμε $L \circ L$). Αποδείξτε ότι οι μόνες *πιθανές* ιδιοτιμές του L είναι οι ± 1.

   Σημείωση: Η άσκηση δεν ισχυρίζεται ότι οι $1, -1$ είναι, οπωσδήποτε, ιδιοτιμές του L!

3. Έστω $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

   (α′) Αποδείξτε ότι το $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, με τη συνήθη πρόσθεση συναρτήσεων και πολλαπλασιασμού σταθεράς επί συνάρτηση, είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος.

   (β′) Έστω $L : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ που ορίζεται: $L(f)(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση L είναι γραμμικός τελεστής του διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

   (γ′) Χρησιμοποιώντας την άσκηση 2, αποδείξτε ότι οι μοναδικές ιδιοτιμές του τελεστή L είναι οι $1, -1$ και οι ιδιόχωροι, που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές αυτές, είναι ο υπόχωρος $\mathcal{F}_A(\mathbb{R})$ των αρτίων πραγματικών συναρτήσεων και ο υπόχωρος $\mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R})$ των περιττών πραγματικών συναρτήσεων.

   (δ′) Αποδείξτε ότι $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \mathcal{F}_A(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R})$.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι, αν $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, τότε η συνάρτηση $f_a(x) = (f(x) + f(-x))/2$ είναι άρτια, η συνάρτηση $f_\pi(x) = (f(x) - f(-x))/2$ είναι περιττή και το άθροισμά τους ισούται ....

4. Αυτή η άσκηση είναι αρκετά ανάλογη με την άσκηση 3. Έστω $\mathcal{M}_n$ ο K-διανυσματικός χώρος $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα K.

   (α′) Έστω $L : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathcal{M}_n$ που ορίζεται: $L(A) = A^T$. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση L είναι γραμμικός τελεστής του διανυσματικού χώρου $\mathcal{M}_n$.

   (γ′) Χρησιμοποιώντας την άσκηση 2, αποδείξτε ότι οι μοναδικές ιδιοτιμές του τελεστή L είναι οι $1, -1$ και οι ιδιόχωροι, που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές αυτές, είναι ο υπόχωρος $\mathcal{M}_\Sigma$ των συμμετρικών $n \times n$ πινάκων και ο υπόχωρος $\mathcal{M}_A$ των αντισυμμετρικών $n \times n$ πινάκων.

   (δ′) Αποδείξτε ότι $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_\Sigma \oplus \mathcal{M}_A$.

   Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι, αν $B \in \mathcal{M}_n$, τότε ο πίνακας $B_\sigma = \frac{1}{2}(B + B^T)$ είναι συμμετρικός, ο πίνακας $B_\alpha = \frac{1}{2}(B - B^T)$ είναι αντισυμμετρικός και το άθροισμά τους ισούται ....

5. Στον χώρο $C^\infty(\mathbb{R})$ των απείρως διαφορισίμων πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής έστω D ο τελεστής διαφόρισης, δηλαδή, για $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ορίζεται $D(f) = f'$ (παράγωγος της f). Αποδείξτε κάθε πραγματικός αριθμός λ είναι ιδιοτιμή του τελεστή D και υπολογίστε τον ιδιόχωρο (μία βάση του), που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

   Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε γνωστό από τη βασική θεωρία των Διαφορικών εξισώσεων, ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' = \lambda \cdot y$ (όπου $y = y(x)$) είναι η $y = ce^{\lambda x}$ $c \in \mathbb{R}$.

6. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (α′) Αποδείξτε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι το $1, -1, 2$ και οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι παράγονται από τα ιδιοδιανύσματα $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ και $v_3 = (-1, 1, 0)$.

   (β′) Έστω ο τελεστής L του $\mathbb{R}^3$, που ορίζεται από τη σχέση $L(x) = Ax$. Υπολογίστε τον πίνακα $D = {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$, όπου $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, και διαπιστώστε ότι είναι άνω τριγωνικός. Έστω B ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα της $\mathcal{B}$. **Δίχως πράξεις** αποδείξτε τα εξής:

   (i) ${}_{\mathcal{E}}I_{\mathcal{B}} = B$, όπου I είναι ο ταυτοτικός τελεστής του $\mathbb{R}^3$ και $\mathcal{E}$ είναι η στάνταρ βάση του $\mathbb{R}^3$.

   (ii) ${}_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{E}} = B^{-1}$

   (iii) $A = BDB^{-1}$. Αφού ο D είναι διαγώνιος πίνακας, η τελευταία σχέση μας λέει ότι «ο A διαγωνιοποιείται».