Θεμέλια των Μαθηματικών - Εαρινό Εξάμηνο 2017-18,
Διδάσκοντες: Ι. Αντωνιάδης, Α. Κουβιδάκης
Φυλλάδιο 7

1. Αποδείξτε με απαγωγή σε άτοπο τις παρακάτω προτάσεις

   α) Έστω a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $ab = c$ δείξτε ότι $a \leq \sqrt{c}$ ή $b \leq \sqrt{c}$.

   β) Αν mn είναι περιττός ακέραιος τότε και οι δύο m, n είναι περιττοί.

   γ) Το άθροισμα ενός ρητού και ενός άρρητου είναι άρρητος.

   δ) Αν $y, x \in \mathbb{R}$ και $y \leq x + \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$ τότε $y \leq x$.

   ε) Δεν υπάρχει μέγιστος ακέραιος.

2. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a + b > 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

3. Για $n \in \mathbb{N}_0$, ορίζουμε αναδρομικά το $n!$ ως $0! = 1$ και $(n+1)! = n!(n+1)$ (επομένως, πρακτικά, $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$).

   α) Δείξτε με επαγωγή ότι το $(n-r)!r!$ διαιρεί το $n!$, για όλα τα r με $0 \leq r \leq n$.

   β) Απο το α) παρατηρείστε ότι ο $\frac{n!}{(n-r)!r!}$ είναι φυσικός αριθμός που θα τον συμβολίζουμε ως $\binom{n}{r}$ (διωνυμικός συντελεστής). Δείξτε ότι

   ι) $\binom{n}{0} = 1$.

   ιι) $\binom{n}{1} = n$.

   ιιι) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

   γ) Δείξτε ότι

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}.$$

   δ) Δείξτε με επαγωγή οτι οι διωνυμικοί συντελεστές είναι ακριβώς οι συντελεστές στο ανάπτυγμα του διωνύμου $(a+b)^n$:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

4. Αποδείξτε με επαγωγή ότι τα επόμενα ισχύουν για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

   α) το 133 διαιρεί το $(11^{n+1} + 12^{2n-1})$.

   β) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2$.

5. Δείξτε με επαγωγή:

α) $x - y \mid (x^n - y^n)$, όπου x, y είναι ακέραιοι και $n \geq 1$.

β) $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$ για $n \geq 1$.

γ) $3 \mid (n^3 - 10n + 9)$ για $n \geq 1$ (Εδώ υπάρχει και άλλη απόδειξη χωρίς επαγωγή, μπορείτε να την δείτε;).

δ) $\sqrt{n} < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$ για $n \geq 2$.

ε) Για κάθε $n \in N_0$, ο αριθμός $4^{2n+1} + 3^{2n+1}$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

στ) Αν η ακολουθία a_n ορίζεται αναδρομικά ως $a_1 = 1, a_2 = 1$ και $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, για $n \geq 3$, δείξτε ότι $a_n = \frac{a^n - b^n}{a-b}$, όπου $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.