ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2017-18
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 204 ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

Άσκηση 3.1 Αποδείξτε ότι για κάθε περιττό x ισχύει $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ και $x^2 \equiv 1 \pmod 8$, ενώ για κάθε άρτιο y ισχύει $y^2 \equiv 0 \pmod 4$ και $y^2 \equiv 0$ ή $4 \pmod 8$.

Άσκηση 3.2 Δείξτε ότι εάν ένας πρώτος $p > 2$ γράφεται ως άθροισμα δύο τετραγώνων, τότε $p \equiv 1 \pmod 4$ (και άρα είναι της μορφής $4n+1$).

Άσκηση 3.3 Έαν οι ακέραιοι x, y, z ικανοποιούν $x^2+2y^2 = z^2$ και $(x, y) = 1$, δείξτε ότι ο $(x, z) = (y, z) = 1$, καθώς και ότι x είναι περιττός και ο y είναι άρτιος.

Άσκηση 3.4 Έαν $x, y, z \in \mathbb{Z}$ με $(x, y) = 1$ και $x^2 + 3y^2 = z^4$, δείξτε ότι ο x είναι περιττός και ο y είναι πολλαπλάσιο του 4.
Υπόδειξη: Δείξτε ότι εάν ο z είναι περιττός τότε $z^4 \equiv 1 \pmod 8$, ενώ αν είναι άρτιος, τότε $z^4 \equiv 0 \pmod 8$.

Άσκηση 3.5 'Εστω n ένας φυσικός αριθμός και $a_0, \dots, a_k$ τα ψηφία στη γραφή του n βάση 10 (δηλαδή $n = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^k a_k$ και $a_i \in \{0, \dots, 9\}$ για $0 \le i \le k$).

α'. Δείξτε ότι $n \equiv 0 \pmod 3$ αν και μόνο αν $a_0 + a_1 + \cdots + a_k \equiv 0 \pmod 3$.

β'. Δείξτε ότι $n \equiv 0 \pmod 9$ αν και μόνο αν $a_0 + a_1 + \cdots + a_k \equiv 0 \pmod 9$.

γ'. Δείξτε ότι $n \equiv 0 \pmod{11}$ αν και μόνο αν $a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^k a_k \equiv 0 \pmod{11}$.

Άσκηση 3.6 Έστω $\{a_1, \dots, a_n\}$ ένα πλήρες σύνολο υπολοίπων modulo n. Δείξτε ότι

$$a_1 + \cdots + a_n \equiv 0 \pmod n \qquad \text{αν } n \text{ είναι περιττός και}$$
$$a_1 + \cdots + a_n \equiv \frac{n}{2} \pmod n \qquad \text{αν } n \text{ είναι άρτιος.}$$

Άσκηση 3.7 Έστω $\{a_1, \dots, a_{\varphi(n)}\}$ ένα περιορισμένο σύνολο υπολοίπων modulo n, όπου $n \ge 3$. Δείξτε ότι

$$a_1 + \cdots + a_{\varphi(n)} \equiv 0 \pmod n.$$

Άσκηση 3.8 Αποδείξτε ότι $7 \mid 123^{321} + 321^{123}$.

Άσκηση 3.9 Υπολογίστε τα δύο τελευταία ψηφία των αριθμών 9^{2018} και 7^{7^7}.

Άσκηση 3.10 Σήμερα είναι Παρασκευή. Τι μέρα θα είναι σε 2018^{1972} ημέρες;