

Θεμέλια των Μαθηματικών - Εαρινό Εξάμηνο 2017-18,
Διδάσκοντες: Ι. Αντωνιάδης, Α. Κουβιδάκης
Φυλλάδιο 6

1. Γράψτε την άρνηση κάθε μιας από τις ακόλουθες προτάσεις
 - α) $\forall x : (P(x) \wedge Q(x))$.
 - β) $\exists x : (P(x) \Rightarrow Q(x))$.
 - γ) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : (x \geq y)$.
 - δ) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} : (x + y \geq z)$.

2. Γραψτε τις παρακάτω προτάσεις με λογικά σύμβολα. Μετά γράψτε την άρνηση για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με λογικά σύμβολα και, επίσης, διατυπώστε την με λόγια. Ποιά είναι σωστή: η πρόταση ή η άρνησή της;
 - α) Για κάθε p πρώτο αριθμό, είτε p είναι περιττός είτε $p = 2$.
 - β) Για κάθε ζώο x , αν x είναι τίγρης τότε το x έχει ρίγες και νύχια.
 - γ) Για κάθε πραγματικούς αριθμούς x και y , αν $x^2 = y^2$ τότε $x = y$.
 - δ) Το γινόμενο ενός άρρητου με ένα ρητό είναι άρρητος.

3. Κατασκευάστε πίνακες αληθείας για τις παρακάτω προτάσεις:
 - α) $P \Rightarrow \neg P$.
 - β) $(P \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (P \Rightarrow P)$.
 - γ) $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$.
 - δ) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.

4. Έστω ότι η πρόταση $P \Rightarrow Q$ είναι ψευδής. Τότε βρείτε την τιμή αληθείας των προτάσεων
 - α) $P \wedge Q$.
 - β) $P \vee Q$.
 - γ) $Q \Rightarrow P$.

5. Δύο προτάσεις λέγονται λογικά ισοδύναμες αν έχουν τους ίδιους πίνακες αληθείας. Εξετάστε ποιά από τα παρακάτω ζεύγη προτάσεων αντιστοιχούν σε λογικά ισοδύναμες προτάσεις.
 - α) $\neg(P \wedge Q)$ και $(\neg P) \vee (\neg Q)$.
 - β) $\neg(P \vee Q)$ και $(\neg P) \wedge (\neg Q)$.

- γ) $\neg(P \wedge (\neg P))$ και $P \vee (\neg P)$.
- δ) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ και $P \Rightarrow Q$.
- ε) $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ και $(P \vee Q) \Rightarrow R$.
- στ) $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$ και $P \Rightarrow (Q \wedge R)$.
- ζ) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ και $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.
- η) $P \Rightarrow Q$ και $\neg(P \vee Q)$.
- θ) $P \Rightarrow Q$ και $(\neg P) \vee Q$.
- ι) $P \Rightarrow Q$ και $(\neg P) \wedge Q$.
- κ) $P \Rightarrow Q$ και $(\neg Q) \wedge P$.

6. Διατυπώστε με λόγια τις παρακάτω προτάσεις και βρείτε ποιές είναι αληθείς.

- α) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$.
- β) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$.
- γ) $\exists N \in \mathbb{N} \forall \epsilon \in \mathbb{R} : ((\epsilon > 0) \wedge (n > N)) \Rightarrow (\frac{1}{n} < \epsilon)$.
- δ) $\forall x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{N} : x + z = y$.
- ε) $\forall x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z} \exists z \in \mathbb{Z} : x + z = y$.

7. Γράψτε τις παρακάτω προτάσεις με λογικά σύμβολα και εξετάστε αν είναι σωστές:

- α) Για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει πραγματικός αριθμός y ώστε $x = y^3$.
- β) Υπάρχει πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x , το άθροισμα $x + y$ είναι θετικό.
- γ) Για κάθε άρρητο αριθμό x υπάρχει φυσικός n ώστε $x < n < x + 1$.
- δ) Το τετράγωνο κάθε ακεραίου αφήνει υπόλοιπο 0 ή 1 όταν διαιρείται με το 4.
- ε) Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πρώτων αριθμών διαφορετικών από το 2 είναι άρτιος αριθμός (Το σύνολο των πρώτων αριθμών συμβολίζεται με \mathfrak{P} .)
- στ) Κάθε μη μηδενικός πραγματικός αριθμός έχει αντίστροφο.
- ζ) Ένας 2 επί 2 πραγματικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσά του δεν είναι 0 (το σύνολο των 2 επί 2 πραγματικών πινάκων συμβολίζεται με $M_2(\mathbb{R})$).