ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για τα εργαστήρια 12 - 18 Μαρτίου

Στις επόμενες ασκήσεις μπορείτε να χρησιμοποιείτε τον τύπο για την αντιστροφή ενός 2×2 πίνακα

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1. Θεωρήστε τους πραγματικούς πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

και έστω $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ οι δύο βάσεις του $\mathbb{R}^2$, των οποίων τα διανύσματα είναι οι στήλες των πινάκων B, C, αντιστοίχως. Έστω, επίσης, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Για καθένα από τα διανύσματα x, Ax, y, Ay υπολογίστε τις συντεταγμένες του ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ και ως προς τη βάση $\mathcal{C}$.

2. Διατηρούμε τους πίνακες και τους συμβολισμούς της άσκησης 1.

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ η γραμμική απεικόνιση $f(v) = Av$. Έστω $\mathcal{E} = \{(1,0),(0,1)\}$ η στάνταρ βάση του $\mathbb{R}^2$. Θυμηθήτε (αποδείχθηκε στο μάθημα) ότι ${}_{\mathcal{E}}f_{\mathcal{E}} = A$ και αποδείξτε τα εξής:

(α′) $B = {}_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ και $C = {}_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, όπου id είναι η ταυτοτική απεικόνιση του $\mathbb{R}^2$.

(β′) Χρησιμοποιώντας κατάλληλα τους τύπους για τον πίνακα της σύνθεσης γραμμικών απεικονίσεων και τον πίνακα της αντίστροφης γραμμικής απεικόνισης, καθώς και το (α′), αποδείξτε ότι $C^{-1}AB = {}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}$.

(γ′) Εάν το v έχει συντεταγμένες $(1, 2)$ ως προς τη βάση B, βρείτε τις συντεταγμένες του $f(v)$ ως προς τη ίδια βάση B.

3. Διατηρούμε τους πίνακες και τους συμβολισμούς της άσκησης 1.

Έστω μία γραμμική απεικόνιση $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ για την οποία είναι γνωστό ότι ${}_{\mathcal{C}}g_{\mathcal{B}} = A$. Αποδείξτε ότι ${}_{\mathcal{E}}g_{\mathcal{E}} = CAB^{-1}$ και υπολογίστε τον τύπο της g, δηλαδή $g(x, y) = (ax+by, cx+dy)$ για κατάλληλες σταθερές $\{a, b, c, d\}$.

4. Θεωρήστε τον διανυσματικό χώρο όλων των πραγματικών 2×2 πινάκων $X \in \mathcal{M}$ και τη βάση του

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Έστω απεικόνιση $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, με $f(X) = XP$ (πολλαπλασιασμός πινάκων), όπου P ο πίνακας $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(α′) Δείξτε ότι η f είναι γραμμική.

(β′) Ποια είναι η διάσταση του πίνακα ${}_{\mathcal{B}}f_{\mathcal{B}}$; Μετά υπολογίστε τον πίνακα.

(γ′) Βρείτε βάση για τον πυρήνα $\mathrm{Ker}(f)$ και βάση για την εικόνα $\mathrm{Im}(f)$.

5. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f = d^2/dt^2$ στο χώρο P_3 των κυβικών πολυωνύμων. Κατασκευάστε τον πίνακα της f ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ του P_3. Υπολογίστε βάσεις για τους $\mathrm{Ker}(f)$ και $\mathrm{Im}(f)$. Περιγράψτε τα πολυώνυμα που ανήκουν σ’ αυτούς τους υποχώρους.

6. Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ έστω ότι $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ είναι βάσεις και B, C είναι οι πίνακες που σχηματίζονται αν βάλομε ως στήλες τους τα διανύσματα των $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$, αντιστοίχως. (Κατ’ αναλογίαν με την άσκηση 2 (α′), $B =_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ και $C =_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, όπου $\mathcal{E}$ είναι η στάνταρ βάση του $\mathbb{R}^n$ και id είναι η ταυτοτική απεικόνιση του $\mathbb{R}^n$.)
(α′) Γιατί οι πίνακες B, C είναι αντιστρέψιμοι· Έστω $M = C^{-1}B$. Αποδείξτε ότι $M =_{\mathcal{C}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ και οι στήλες του M είναι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων της $\mathcal{B}$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$.
(β′) Έστω x (στήλη) οι συντεταγμένες ενός διανύσματος $v \in \mathbb{R}^n$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ και y (στήλη) οι συντεταγμένες του ίδιου διανύσματος ως προς τη βάση $\mathcal{C}$. Αποδείξτε ότι $Bx = Cy$.

Quiz

1. Θεωρούμε τον $\mathbb{C}$ ως πραγματικό διανυσματικό χώρο δύο διαστάσεων και a ένα σταθερό μιγαδικό αριθμό. Όρίζουμε την απεικόνιση $f(z) = az$. Δείξε ότι αυτή είναι γραμμική και βρες τον πίνακά της ως προς τη βάση $\{1, i\}$ του $\mathbb{C}$.

2. Το ίδιο πρόβλημα με το προηγούμενο για την απεικόνιση $g(z) = a\bar{z}$ όπου η παύλα συμβολίζει τον συζυγή του z.

3. Στο διανυσματικό χώρο όλων των πραγματικών 2×2 πινάκων $X \in \mathcal{M}$ θεωρούμε την απεικόνιση $f(X) = X^t$ (ο ανάστροφος). Δείξε ότι αυτή είναι γραμμική και βρες την παράστασή της ως προς τη βάση της άσκησης 4.

4. Σε συνέχεια της προηγούμενης άσκησης δείξε ότι η $g(X) = X - X^t$ για $X \in \mathcal{M}$ είναι γραμμική $g : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ και προσδιόρισε τον πυρήνα της.

5. Στην άσκηση 4 βάλε τις δύο γραμμές των πινάκων τη μία δίπλα στην άλλη και μεταμόρφωσε την άσκηση σε μία για γραμμικές απεικονίσεις της μορφής $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$.