

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιος - Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Τετάρτης 7 Μαρτίου

1. Έστω $\text{id} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η ταυτοτική γραμμική απεικόνιση, καθώς και οι βάσεις $\mathcal{B} = \{(1, -1), (1, -2)\}$, $\mathcal{C} = \{(1, 3), (-1, -4)\}$, $\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Υπολογίστε τους πίνακες ${}_{\mathcal{B}}\text{id}_{\mathcal{E}}$, ${}_{\mathcal{E}}\text{id}_{\mathcal{C}}$, ${}_{\mathcal{B}}\text{id}_{\mathcal{C}}$ και ${}_{\mathcal{C}}\text{id}_{\mathcal{B}}$. Σύμφωνα με τη θεωρία, ${}_{\mathcal{C}}\text{id}_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}\text{id}_{\mathcal{C}} = I_2$ (ταυτοτικός 2×2 πίνακας). Επαληθεύστε το. Επαληθεύστε, επίσης, τις εξής σχέσεις, οι οποίες προβλέπονται από τη θεωρία: ${}_{\mathcal{B}}\text{id}_{\mathcal{E}} \cdot {}_{\mathcal{E}}\text{id}_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{B}}\text{id}_{\mathcal{C}}$.
2. Θεωρήστε τις γραμμικές απεικονίσεις $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y + z, 2x + z)$ και $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (x + 3y, x + 4y)$. Έστω ότι \mathcal{B}, \mathcal{C} είναι οι βάσεις του \mathbb{R}^2 , που ορίστηκαν στην άσκηση 1, και στον \mathbb{R}^3 θεωρήστε τη βάση $\mathcal{D} = \{(0, 1, 1), (-1, 0, 2), (2, 3, 0)\}$. Υπολογίστε τους εξής πίνακες: ${}_{\mathcal{B}}f_{\mathcal{D}}$, ${}_{\mathcal{C}}g_{\mathcal{B}}$, ${}_{\mathcal{C}}(g \circ f)_{\mathcal{D}}$. Σύμφωνα με τη θεωρία, πρέπει ${}_{\mathcal{C}}(g \circ f)_{\mathcal{D}} = {}_{\mathcal{C}}g_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}f_{\mathcal{D}}$. Επαληθεύστε το.
3. Βρείτε μιά βάση \mathcal{B}_1 του χώρου στηλών του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ και μιά βάση \mathcal{B}_2 του μηδενόχωρού του. Για την γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = Ax$ και τη βάση $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ υπολογίστε τον πίνακα ${}_{\mathcal{B}}f_{\mathcal{B}}$.