Θεμέλια των Μαθηματικών - Εαρινό Εξάμηνο 2017-18,
Διδάσκοντες: Ι. Αντωνιάδης, Α. Κουβιδάκης
Φυλλάδιο 5

1. Έστω $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ και $f : A \to B$ με

$$f(a) = 1,\ f(b) = 3,\ f(c) = 3.$$

   Βρείτε τά $f(\{a, b\})$, $f(\{b, c\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(3)$, $f^{-1}(\{1, 2\})$.

2. Για τις ακόλουθες συναρτήσεις ελέγξτε εάν υπάρχει δεξιό αντίστροφο ή/και αριστερό αντίστροφο, και εάν υπάρχει βρείτε το.

   α) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4x + 2$,

   β) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ g(x) = x^2$.

3. Για τις συναρτήσεις f και g της παραπάνω άσκησης, βρείτε τα σύνολα $f([-1, 1])$, $f^{-1}([0, 2])$, $g([-3, -2])$ και $g^{-1}([2, 4])$.

4. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x\,|x|$ είναι 1-1 και επί. Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

5. Οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$, και πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Βρείτε σε κάθε περίπτωση ποιό είναι το μεγαλύτερο δυνατό πεδίο ορισμού.

   α) $V(t) = \ln(1 - t^2)$,

   β) $f(x) = \ln(\sin 2x)$,

   γ) $\rho(u) = (u - 1)(u - 2)(u - 3)(u - 4)$.

6. Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $f(x) = (x + 1)^2$.

   α) Σχεδιάστε το γράφημα της f.

   β) Προσδιορίστε τα σύνολα $B = f(\mathbb{R})$, $f^{-1}([-1, 4])$, $f^{-1}(-2)$, $f^{-1}([-2, 0))$.

   γ) Βρείτε δύο διαφορετικά δεξιά αντίστροφα της $f : \mathbb{R} \to B$.

   δ) Βρείτε δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$, A_1 και A_2, τέτοια ώστε $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}$ και $f|_{A_i}$, για $i = 1, 2$, να είναι ένα προς ένα. Βρείτε σε κάθε περίπτωση ένα αριστερό αντίστροφο της $f|_{A_i} : A_i \to R$. (Σημείωση: Ως $f|_{A_i}$ συμβολίζουμε τον περιορισμό της f στο A_i, δηλ. το πεδίο ορισμού της f είναι το υποσύνολο $A_i \subset \mathbb{R}$).

7. Ορίζουμε τις διμελείς πράξεις στο $\mathbb{Z}$:

   α) $x \circ y = x - y$,

   β) $x \star y = |x - y|$,

   γ) $x \circ y = x + y + xy$,

δ) $x \star y = 21(x + y + 12((-1)x + y + 1) + 1)$.

Επαληθεύστε οτι είναι διμελείς πράξεις στο $\mathbb{Z}$, δηλαδή συναρτήσεις $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Σε κάθε περίπτωση ελέγξτε εάν η πράξη είναι μεταθετική και προσεταιριστική.

8. Για ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις η $\star$ ορίζει διμελή πράξη;. Στην περίπτωση που ορίζεται πράξη εξετάστε αν αυτή είναι προσεταιριστική ή μεταθετική.

   β) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = \frac{a}{b}$,

   γ) Στο σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$ με $a \star b = a^b$,

   δ) Στο σύνολο των μή μηδενικών ακεραίων $\mathbb{Z}^\star = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ με $a \star b = a^b$,

   ε) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = ab + 1$,

   στ) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = |a|\, b$,

   ζ) Στο σύνολο των μή μηδενικών ακεραίων $\mathbb{Z}^\star = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ με $a \star b = 2^{ab}$,

   η) Στο σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$ με $a \star b = \max(a, b)$.

9. Έστω $f : X \to Y$. Έστω $(A_t)_{t\in T}$ οικογένεια υποσυνόλων του X. Αποδείξτε οτι:

   α) $f(\cup_{t\in T} A_t) = \cup_{t\in T} f(A_t)$.

   β) $f(\cap_{t\in T} A_t) \subseteq \cap_{t\in T} f(A_t)$.

   γ) Αν η f είναι 1-1, τότε $f(\cap_{t\in T} A_t) = \cap_{t\in T} f(A_t)$.

10. Δίδεται η συνάρτηση $f : A \to B$ και $U \subset A$, $X \subset B$. Δείξτε ότι $U \subseteq f^{-1}(f(U))$ και $f(f^{-1}(X)) \subset X$.