

1. Θεωρούμε στο σύνολο $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ την σχέση $a \rho b$ εαν και μόνον εάν $a \mid 2b$. Ορίζει κάποια διάταξη η παραπάνω σχέση και αν ναι, τί είδους (ασθενή, μερική, γνήσια);
2. Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε το μέγιστο πεδίο ορισμού, δηλ. το μεγαλύτερο υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε οι παρακάτω τύποι να ορίζουν συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Βρείτε, επίσης, τις εικόνες αυτών των συναρτήσεων.
 - α) $f(x) = \sqrt{x+4}$,
 - β) $f(x) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$,
 - γ) $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$,
 - δ) $f(x) = 1 - e^x$,
 - ε) $f(x) = \ln \ln \cos x$,
 - στ) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.
3. Βρείτε την εικόνα της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f((a, b)) = 1 - a^2 - b^2$.
4. Δώστε παραδείγματα συναρτήσεων $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ που να είναι:
 - α) 1-1 αλλά όχι επί,
 - β) επί αλλά όχι 1-1,
 - γ) ούτε 1-1 ούτε επί,
 - δ) και επί και 1-1 (δηλ. αμφιμονοσήμαντη).
5. Έστω $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow C$ δείξτε ότι
 - α) Αν η $g \circ f$ είναι 1-1 τότε και η f είναι 1-1. Δείξτε ότι μπορούμε να διαλέξουμε f, g με f 1-1 χωρίς να είναι 1-1 η σύνθεση $g \circ f$.
 - β) Αν $g \circ f$ είναι επί τότε και η g είναι επί. Δείξτε ότι μπορούμε να διαλέξουμε f, g με g επί χωρίς να είναι επί η σύνθεση $g \circ f$.
6. Βρείτε μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow [0, 5]$.
7. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = |x| - x$. Είναι 1-1;. Βρείτε την εικόνα της.
8. Έστω $A = \{a, b\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$. Πόσες διαφορετικές συναρτήσεις $f : A \rightarrow B$ υπάρχουν. Πόσες από αυτές είναι 1-1. Πόσες από αυτές είναι επί. Πόσες από αυτές είναι αμφιμονοσήμαντες;

9. Έστω $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ και $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = 2x - 1$. Βρείτε τις εικόνες των f, g . Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$ ορίζονται και βρείτε τον τύπο τους.
10. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + y^2$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(u) = \cos^2 u$. Ποιες από τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ ορίζονται;
11. Έστω $A = \{-2, 0, 4\}$ και $B = \{1, 3, 5\}$. Θεωρούμε $f \subset A \times \mathbb{Z}$ με $f = \{(-2, 1), (0, 3), (4, 5)\}$ και $g \subset B \times \mathbb{Z}$ με $g = \{(1, 1), (3, 3), (5, 9)\}$. Δείξτε ότι τα παραπάνω υποσύνολα ορίζουν συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{Z}$. Εξετάστε ποιές από τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ ορίζονται, και βρείτε τις (όταν ορίζονται!).
12. Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x - 2$.