ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2017-18
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 204 ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Άσκηση 2.1 Αποδείξτε τις παρακάτω προτάσεις.

α΄. Αν a ένας περιττός αριθμός, τότε $a = 4n + 1$ ή $a = 4n + 3$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

β΄. Αν $a_1, \ldots, a_k$ είναι περιττοί της μορφής $4n + 1$, τότε το γινόμενο τους είναι της μορφής $4n + 1$.

Άσκηση 2.2 Θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $4n + 3$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέστε ότι υπάρχουν περασμένοι το πλήθος πρώτοι της μορφής $4n + 3$, ας πούμε οι $p_1, \ldots, p_k$. Θεωρήστε τον αριθμό $a = 4p_1 \cdots p_k - 1$.

α΄. Δείξτε ότι ο αριθμός a είναι της μορφής $4n + 3$.

β΄. Δείξτε ότι ο a πρέπει να διαιρείται από ένα πρώτο της μορφής $4n + 3$.

γ΄. Δείξτε ότι κανένας από τους $p_1, \ldots, p_k$ δεν διαιρεί τον a.

Άσκηση 2.3 Δείξτε ότι $p | \binom{p}{k}$ για κάθε $k = 1, \ldots, p - 1$. Θυμίζουμε ότι για ακέραιους αριθμούς n, k με $0 \le k \le n$, ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{n}{k}$ είναι φυσικός αριθμός και είναι ίσος με $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Άσκηση 2.4 Έστω $n > 2$ φυσικός αριθμός. Δείξτε ότι υπάρχει πρώτος p με $n < p < n!$.
Υπόδειξη: Δείξτε ότι κάθε πρώτος διαιρέτης του $n! - 1$ βρίσκεται στο ζητούμενο διάστημα.

Άσκηση 2.5 Έστω p_n ο n-οστός πρώτος. Για πράδειγμα, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$. Δείξτε ότι $p_n \le 2^{2^n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Υπόδειξη: Δείξτε ότι $p_{n+1} \le p_1 \cdots p_n + 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στη συνέχεια δείξτε τη ζητούμενη ανισότητα με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2.6 Για $n \in \mathbb{N}$ και p πρώτο, έχουμε ορίσει $v_p(n)$ να είναι η δύναμη στην οποία έμφανίζεται ο πρώτος p στην κανονική ανάλυση του n. Εάν ο p δεν διαιρεί τον n, τότε ορίζουμε $v_p(n) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor .$$

Παρατηρήστε ότι το παραπάνω άθροισμα είναι πεπερασμένο (γιατί;)
Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι εάν $p > n$ τότε η ισότητα ισχύει τετριμμένα. Έστω ότι $p \le n$. Πόσοι αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, n$ διαιρούνται από το p; Γενικότερα, πόσοι διαιρούνται από το p^k για $k \in \mathbb{N}$;