ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Δευτέρας 26 Φεβρουαρίου

1. Δείξτε ότι το σύνολο $\{1, (x-1), (x-1)^2\}$ αποτελεί βάση του διανυσματικού χώρου των πραγματικών πολυωνύμων βαθμού ≤ 2.

2. Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}[x]$ των πραγματικών πολυωνύμων, έστω U ο υπόχωρος των πολυωνύμων βαθμού ≤ 2, που έχουν ρίζες το 0 και το 1 και W ο υπόχωρος των πολυωνύμων βαθμού ≤ 3, που έχουν ρίζες το 0 και το 1.
   (α΄) Βρείτε μια βάση $\mathcal{A}$ του U και μία βάση $\mathcal{B}$ του W, με $\mathcal{B} \cap \mathcal{A} = \emptyset$.
   (β΄) Βρείτε μία βάση του W, διαφορετική από τη $\mathcal{B}$ η οποία να περιέχει την $\mathcal{A}$.

3. Δείξτε ότι, σε ένα διανυσματικό χώρο διάστασης 5, δύο 4-διάστατοι υπόχωροι U, V δεν είναι δυνατόν να έχουν τομή $U \cap V$ διάστασης ≤ 2.

4. Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ Θεωρήστε τους υποχώρους $U = \langle(1, 0, 1, 1), (0, 2, 0, 1)\rangle$ και $V = \langle(-1, 2, -1, 0), (0, 1, 1, -1), (1, 2, 1, 2)\rangle$. Αποδείξτε ότι ο U είναι υπόχωρος του V και βρείτε μία βάση του V, η οποία να περιέχει την παραπάνω βάση του U.

5. Στον $\mathbb{R}^4$ θεωρήστε τους εξής υποχώρους: $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = 2x_4,\ x_2 = x_3\}$ και $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_4 = 0\}$.
   (α΄) Υπολογίστε βάσεις $\mathcal{A}_1$ και $\mathcal{A}_2$ των U και V, αντιστοίχως.
   (β΄) Υπολογίστε βάση του υποχώρου $U \cap V$.
   (γ΄) Υπολογίστε τη διάσταση του υποχώρου $U + V$.
   (δ΄) Συμπληρώστε τη βάση του $U \cap V$ με κατάλληλα διανύσματα, ώστε να πάρετε μία βάση $\mathcal{B}_1$ του U και μία βάση $\mathcal{B}_2$ του V. Σύμφωνα με την απόδειξη της Πρότασης 2.17 των Σημειώσεων του Χρ. Κουρουνιώτη, το $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ είναι βάση του $U + V$. Ποια είναι αυτή;

6. Έστω K-διανυσματικός χώρος V και U, W υπόχωροι του V. Έστω ότι $S, T \subseteq V$, τέτοια ώστε $U = \langle S \rangle$ και $W = \langle T \rangle$. Αποδείξτε ότι $U + W = \langle S \cup T \rangle$.

7. Στον $\mathbb{R}^4$, θεωρούμε, και πάλι, τους υποχώρους U, V της ασκήσεως 5 και τις αντίστοιχες βάσεις τους $\mathcal{A}_1$ και $\mathcal{A}_2$ του ερωτήματος (α΄). Θα υπολογίσομε με διαφορετική μέθοδο μια βάση του $U + V$. Από την άσκηση 6 έχομε ότι $U + V = \langle \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \rangle$. Από τη θεωρία είναι γνωστό ότι, αν ένα σύνολο παράγει έναν διανυσματικό χώρο, τότε περιέχει βάση αυτού του χώρου. Άρα, υπολογίστε μία βάση του $U + V$, η οποία περιέχεται στο $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.

Quiz

1. Ποια είναι η διάσταση του $\mathbb{C}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}^2$ και ποια η διάσταση του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}^2$;

2. Αληθεύει ότι, άν ο διανυσματικός υπόχωρος V έχει διάσταση n, τότε, για κάθε ακέραιο $k \leq n-1$ υπάρχει υπόχωρος του V διαστάσεως k;

3. Έστω U υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V. Αληθεύει ότι, αν ένα σύνολο $S \subset U$ είναι ανεξάρτητο (αντιστοίχως, εξαρτημένο) ως υποσύνολο του διανυσματικού χώρου U, τότε είναι και ανεξάρτητο (αντιστοίχως, εξαρτημένο) και ως υποσύνολο του διανυσματικού χώρου V;

4. Εξετάστε, για καθέναν από τους ισχυρισμούς (α΄) και (β΄), αν είναι αληθής ή ψευδής:
   (α΄) Σε ένα $n \times n$ πίνακα, ο χώρος των γραμμών ισούται πάντα με τον χώρο των στηλών.
   (β΄) Σε ένα $n \times n$ πίνακα, μια βάση του χώρου των γραμμών είναι και βάση του χώρου των στηλών.
   Ποιες είναι οι απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα όταν ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος;