

Θεμέλια των Μαθηματικών - Εαρινό Εξάμηνο 2017-18,
Διδάσκοντες: Ι. Αντωνιάδης, Α. Κουβιδάκης
Φυλλάδιο 3

1. Φτιάξτε τους πίνακες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού των $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6$. Παρατηρήστε ότι στα \mathbb{Z}_4 και \mathbb{Z}_6 υπάρχουν μη μηδενικά στοιχεία που το γινόμενο τους κάνει μηδέν. Αυτό δεν συμβαίνει στο \mathbb{Z}_5 . Μπορείτε να βρείτε κάποια εξήγηση για το τελευταίο;
2. Έστω \mathbb{Z}_n το σύνολο των ακεραίων modulo n τα στοιχεία του οποίου τα έχουμε συμβολίσει ως a_n ή ως $[a]_n$, $a \in \mathbb{Z}$. Βρείτε τον ακέραιο r , με $0 \leq r \leq n - 1$, για τον οποίο έχουμε:
 - (α) $126_{12} = r_{12}$ στο \mathbb{Z}_{12} .
 - (β) $[-1]_{12} = r_{12}$ στο \mathbb{Z}_{12} .
 - (γ) $[-20]_8 = r_8$ στο \mathbb{Z}_8 .
 - (δ) $[-200]_9 = r_9$ στο \mathbb{Z}_9 .
 - (ε) $325_3 + 223_3 = r_3$ και $325_3 \cdot 223_3 = r_3$ στο \mathbb{Z}_3 .
 - (στ) $(322_3)^{189} = r_3$ και $(323_3)^{189} = r_3$ στο \mathbb{Z}_3 .
 - (ζ) $(11_5)^{728} = r_5$, $(4_5)^{728} = r_5$ και $(2_5)^{728} = r_5$ στο \mathbb{Z}_5 .
3. Βρείτε όλα τα ζεύγη $(a_{12}, b_{12}) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}$ για τα οποία ισχύει ότι $a_{12} \cdot b_{12} = 0_{12}$.
4. Θεωρούμε στο \mathbb{Z}_{15} το στοιχείο 8_{15} . Δείξτε ότι υπάρχει (και βρείτε το!) ένα στοιχείο $a_{15} \in \mathbb{Z}_{15}$ για το οποίο ισχύει ότι $a_{15} \cdot 8_{15} = 1_{15}$. Ισχύει το ίδιο για το στοιχείο 6_{15} ;
5. Αποδείξτε ότι για κάθε περιττό ακεραίο a ισχύει ότι $a^2 \equiv_8 1$ (δηλ. $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$).
6. Αποδείξτε ότι για κάθε ακεραίο a ισχύει ότι $a^2 \equiv_8 0, 1$ ή 4 (δηλ. $a^2 \equiv 0, 1$ ή $4 \pmod{8}$).
7. Υπάρχει $a_6 \in \mathbb{Z}_6$ που να επαληθεύει την εξίσωση $4_6 x = 3_6$ (δηλ. $4_6 a_6 = 3_6$);
8. Βρείτε τις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων:
 - (α) $x^2 = 1_4$ στο \mathbb{Z}_4 .
 - (β) $x^4 = 1_5$ στο \mathbb{Z}_5 .
 - (γ) $x^2 + 3_6 x + 2_6 = 0_6$ στο \mathbb{Z}_6 .
9. Στο \mathbb{Z} θεωρούμε τις σχέσεις ισοτιμίας \equiv_4 και \equiv_6 . Δείξτε ότι η σχέση $\equiv_4 \cap \equiv_6$ είναι ίση με την σχέση \equiv_n , για κάποιον φυσικό αριθμό n τον οποίο πρέπει να βρείτε.
10. Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $B = \{1, 2, 6, 24, 72\}$. Εξετάστε αν η σχέση $a \rho b$ αν και μόνον αν $a \mid b$, ορίζει σχέση ασθενούς διάταξης στα παραπάνω σύνολα.

11. Στο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ορίζουμε τις παρακάτω σχέσεις

(α) $(a, b) \preceq_1 (a', b')$ αν και μονον αν $a + b \leq a' + b'$.

(β) $(a, b) \preceq_2 (a', b')$ αν και μονον αν $ab \leq a'b'$.

(γ) $(a, b) \preceq_3 (a', b')$ αν και μονον αν $a \leq b$ και $a + b \leq a' + b'$.

Εξετάστε ποιές από τις παραπάνω σχέσεις ορίζει σχέση ασθενούς διάταξης στο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.