

Θεμέλια των Μαθηματικών - Εαρινό Εξάμηνο 2017-18,
Διδάσκοντες: Ι. Αντωνιάδης, Α. Κουβιδάκης
Φυλλάδιο 2

1. Θεωρούμε τὰ σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ και $C = A \times B$.
 - (α) Γράψτε όλα τα στοιχεία του C .
 - (β) Σχεδιάστε το καρτεσιανό γινόμενο $A \times C$.
 - (γ) Ορίζουμε τη σχέση ρ μεταξύ των συνόλων A και C , με $x \rho (u, v)$ εάν $x > u$. Σημειώστε στο σχέδιο του $A \times C$ το υποσύνολο που ορίζει τη σχέση ρ .
2. Θεωρούμε τις σχέσεις ρ και σ στο σύνολο X , δηλαδή $\rho, \sigma \subseteq X \times X$. Εάν οι ρ και σ είναι συμμετρικές, εξετάστε εάν η $\rho \cup \sigma$, $\rho \cap \sigma$ και η $\rho \setminus \sigma$ είναι επίσης συμμετρικές.
3. Στα επόμενα προβλήματα δίνονται σχέσεις σε σύνολα. Εξετάστε αν είναι σχέσεις ισοδυναμίας ή όχι και σε όσες είναι προσδιορίστε τις κλάσεις ισοδυναμίας με όσο πιο απλό τρόπο μπορείτε. (Θυμόμαστε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας θα μας δώσουν μία διαμέριση του συνόλου.)
 - (α) Στο \mathbb{R} , $x \sim y$ αν και μόνο αν $|x| = |y|$.
 - (β) Στο $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν “Υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ ώστε $x = ry$ ”.
 - (γ) Στο σύνολο $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν $y/2 \leq x \leq 2y$.
 - (δ) Στο \mathbb{N} , $x \sim y$ αν και μόνο αν “Υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $x = 2^n y$ ”.
 - (ε) Στο \mathbb{R} , $x \sim y$ αν και μόνο αν $xy > 0$.
 - (στ) Στο \mathbb{R}^* , $x \sim y$ αν και μόνο αν $xy > 0$.
 - (ζ) Στο \mathbb{Z} , $x \sim y$ αν και μόνο αν $4 \mid x^2 - y^2$.
 - (η) Στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $(x, y) \sim (a, b)$ αν και μόνο αν “Υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε, $(x, y) = \lambda(a, b)$ ” (εδώ υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ανάμεσα στην διαμέριση που προκύπτει και στο $[0, 2\pi)$, βλέπετε ποια είναι ;).
4. Μπορείτε να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων που πρέπει να έχει μία (μη κενή) σχέση R στο $A = \{1, 2, 3\}$ ώστε να είναι ανακλαστική; συμμετρική; μεταβατική;

5. Υπάρχει κάποιο λάθος στην παρακάτω απόδειξη ότι εάν μία σχέση \sim είναι συμμετρική και μεταβατική, τότε είναι ανακλαστική. Εξηγήστε την απάντησή σας. 'Απόδειξη': Εστω $\alpha \sim \beta$. Αφού η \sim είναι συμμετρική, $\beta \sim \alpha$. Αφού η \sim είναι μεταβατική, από τα $\alpha \sim \beta$ και $\beta \sim \alpha$ συμπεραίνουμε $\alpha \sim \alpha$. Άρα η \sim είναι ανακλαστική.
6. Στο σύνολο X των κύκλων του επιπέδου, ορίζουμε την σχέση $A \sim B$ αν και μόνο αν οι κύκλοι A και B είναι ομόκεντροι. Δείξτε ότι η παραπάνω σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας.
7. Στο σύνολο X των ευθειών του επιπέδου, ορίζουμε την σχέση $\epsilon \sim \eta$ αν και μόνο αν οι ευθείες ϵ και η είναι παράλληλες. Δείξτε ότι η παραπάνω σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας και βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας.
8. Στο σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών ορίζουμε την σχέση $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι η παραπάνω σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας και βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας ενός (οποιοδήποτε) ακεραίου $a \in \mathbb{Z}$, όπως επίσης, και του ρητού αριθμού $\frac{1}{2}$.
9. Εστω \mathbb{Q} το σύνολο των ρητών αριθμών. Ορίζουμε $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$. Στο \mathbb{Q}^* ορίζουμε την σχέση \sim ως εξής:

$$a \sim b \iff a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}.$$

Ναδειχθεί ότι η \mathcal{R} είναι σχέση ισοδυναμίας και να βρεθεί η κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου $5/2 \in \mathbb{Q}^*$.