Εφαρμοσμένη Στατιστική

Δ. Μπάγκαβος

14 Φεβρουαρίου 2018

Ασκήσεις κατανομών

Άσκηση 1: Με βάση πρότερη εμπειρία, αναμένεται πως 0.5% των φορολογικών δηλώσεων που υποβάλλονται περιέχει αριθμητικό λάθος. Ποια η πιθανότητα μεταξύ 2000 φορολογικών δηλώσεων να υπάρχουν ακριβώς 12 δηλώσεις με αριθμητικό λάθος;

Λύση: Ορίζουμε X την τ.μ. που μετράει τον αριθμό λαθών σε n φορολογικές δηλώσεις. Τότε, εδώ έχουμε τον ορισμό της διωνυμικής κατανομής με $n = 2000$, $p = 0.5/100$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(X = 12)$ όταν η $X \sim B(2000, 0.005)$. Στην R, $P(X = 12) =$ dbinom(12, 2000, 0.005) = 0.09497041.

Σημείωση: Επειδή έχουμε μεγάλο αριθμό δείγματος ($n = 2000$), εδώ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την προσέγγιση της διωνυμικής απο Poisson, $X \sim Poisson(12, 2000 * 0.005)$= dpois(12, 10) =0.09478033 (περίπου το ίδιο με την πάνω απάντηση).

Άσκηση 2: Μία εταιρεία πριν την παραλαβή ενός προιόντος που έρχεται συσκευασμένο σε κιβώτια των 50, εξάγει τυχαία 5 αντικείμενα από κάθε κιβώτιο και ελέγχει την ποιότητα τους. Για να γίνει ένα κιβώτιο αποδεκτό πρέπει να έχει λιγότερα του ενός ελαττωματικά αντικείμενα. Αν το ποσοστό ελαττωματικών αντικείμενων στο στάδιο της παραγωγής είναι 10% ποιό το ποσοστό των κιβωτίων που δεν θα γίνουν αποδεκτά;

Λύση: Η τ.μ. X που μετράει τον αριθμό των ελαττωματικών αντικειμένων στο δείγμα ακολουθεί διωνυμική κατανομή με $X \sim B(n = 5, p = 0.1)$.

Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα $P(X \leq 1) = P(X = 0)+P(X = 1) = dbinom(0, 5, 0.1)+ dbinom(1, 5, 0.1) = 0.91854$.

Άσκηση 3: Τα παραγόμενα λάστιχα αυτοκινήτου έχουν ελαττωματικό εσωτερικό τοίχωμα με συχνότητα 1 στα 1000. Ποια η πιθανότητα σε 500 νέα αυτοκίνητα κανένα λάστιχο να μην είναι ελαττωματικό;

Λύση: Η τ.μ. X που μετράει τον αριθμό των ελαττωματικών ελαστικών ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με $p = 1/1000$. Το δείγμα μας έχει 500 αμάξια άρα 2000 ελαστικά, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(X = 0) = dbinom(0, 2000, 0.001) = 0.1351999$.

Άσκηση 4: Μία ηλεκτρονική συσκευή καταγράφει ατέλειες στα παραγόμενα κομμάτια μιας μηχανής. Από προηγούμενες παραγωγές αναμένουμε έναν ρυθμό 0.2 ατέλειες ανά m^2. Αν τα παραγόμενα κομμάτια είναι μεγέθους $20m^2$, να προσδιοριστεί η κατανομή των ατελειών και να υπολογιστεί η πιθανότητα σε ένα οποιοδήποτε κομμάτι να υπάρχουν 5 ατέλειες.

Λύση: Η τ.μ. X που μετράει αριθμό ατελειών σε ένα κομμάτι $20m^2$ ακολουθεί την $X \sim Poisson(\lambda = 20 * 0.2)$. Άρα η πιθανότητα $P(X = 5) = dpois(5, 0.2 * 20) = 0.1562935$

Παρατήρηση: Αν η πιθανότητα να βρεθεί μια ατέλεια σε οποιοδήποτε κομμάτι $20m^2$ ορίζεται στην $p = 0.05$, ποια η πιθανότητα να έχουμε 3 βλάβες σε 10 διαφορετικά κομμάτια;

Άσκηση 5: Η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνομιλίας ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\alpha = 1/3$. Ποια η πιθανότητα μιας οποιασδήποτε συνομιλίας να διαρκέσει λιγότερο από 3 λεπτά;

Λύση: Αν η X μετράει το χρόνο ομιλίας, $P(X < 3) = pexp(3, rate = 1/3) = 0.6321206$.

Άσκηση 6: Η αντοχή των παραγόμενων εξαρτημάτων μίας μηχανής περιγράφεται από την κατανομή Weibull με παραμέτρους $\alpha = 0.25$ (shape), και $\lambda = 1/2$ (scale). Οι προδιαγραφές κάθε εξαρτήματος επιβάλλουν να έχει αντοχή πάνω από 0.6 μονάδες αντοχής. Τι ποσοστό των εξαρτημάτων περιμένουμε να είναι ελαττωματικά;

Λύση: Ορίζουμε X την τ.μ. που μετράει την αντοχή του κάθε εξαρτήματος. Τότε $X \sim Weibull(shape = 0.25, scale = 1/2)$. Για να μετρήσουμε το ποσοστό των αναμενόμενων ελαττωματικών προιόντων θέλουμε την πιθανότητα $P(X > 0.6) = 1 - P(X < 0.6) =$ 1-pweibull(0.6, shape=0.25, scale=1/2) =0.3511172. Άρα περίπου 35% των εξαρτημάτων περιμένουμε να είναι ελαττωματικά.

Άσκηση 7: Το χαρακτηριστικό X ενός προϊόντος ακολουθεί την κανονική κατανομή, $X \sim N(5, 0.25 * 10^{-2})$. Το προϊόν θεωρείται κατάλληλο όταν η τιμή της X είναι στο δ/μα $5 - 10^{-1} < X < 5 + 10^{-1}$.

1. Ποιο το ποσοστό των κατάλληλων προϊόντων στο σύνολο της παραγωγής;
2. Αν εκλέξουμε 4 κομμάτια στην τύχη, ποια η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 3 κατάλληλα;

Λύση:

1. $P(5 - 10^{-1} < X < 5 + 10^{-1}) = P(4.9 < X < 5.1) = P(\frac{4.9-5}{0.05} < \frac{X-5}{0.05} < \frac{5.1-5}{0.05}) = P(-2 < Z < 2) = P(-2 < Z < 0) + P(0 < Z < 2) = 2 * P(0 < Z < 2) = 2 * (P(-\infty < Z < 2) - 1/2) = 2(pnorm(2) - 1/2) = 0.9545$.
2. Έστω Y ο αριθμός των κατάλληλων προϊόντων. $Y \sim B(n = 4, p = 0.9545)$. Η πιθανότητα να έχουμε τουλ. 3 κατάλληλα σημαίνει $P(Y \geq 3) = P(Y = 3) + P(Y = 4) = dbinom(3, 4, 0.9545) + dbinom(4, 4, 0.9545) = 0.9883192$.